Devoir Surveillé n°3

ECE3 Lycée Carnot

30 novembre 2010

Durée : 4H. Calculatrices interdites

Exercice 1

On définit la suite (u_n) par $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

1. (a) Écrire les premières lignes du triangle de Pascal, et calculer u_0, u_1, u_2, u_3 et u_4.

   (b) Montrer que, si $k \leqslant \frac{n-1}{2}$, $\binom{n}{k} \leqslant \binom{n}{k+1}$ (autrement dit, chaque ligne du triangle de Pascal est constitué de termes croissants jusqu'à son milieu).

   (c) En déduire que, $\forall 2 \leqslant k \leqslant n-2$, $\frac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant \frac{1}{\binom{n}{2}}$, puis que $\forall n \geqslant 2$, $2 \leqslant u_n \leqslant 2 + \frac{2}{n} + \sum_{k=2}^{k=n-2} \frac{1}{\binom{n}{2}}$.

   (d) Prouver que (u_n) converge, et préciser sa limite.

2. (a) À l'aide de la formule de Pascal, montrer que $\forall k \leqslant n$, $\frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}}$.

   (b) Montrer que, pour $n \geqslant 3$, $\frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{2}} \geqslant \frac{1}{\binom{n+1}{1}} + \frac{1}{\binom{n+1}{2}} + \frac{1}{\binom{n+1}{3}}$.

   (c) Déduire des deux questions précédentes que (u_n) est décroissante à partir de u_3.

3. (a) Montrer à l'aide d'un changement d'indice que $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n+1-k)!}{n!} = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(k+1)!(n-k)!}{n!}$.

   (b) En déduire que $2\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n+1-k)!}{n!} = (n+2)\sum_{k=0}^{k=n} \frac{k!(n-k)!}{n!}$.

   (c) Montrer que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2n+2} u_n$.

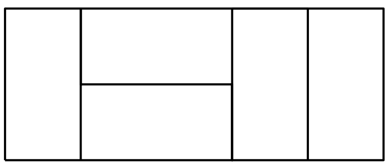
   (d) Écrire un programme PASCAL calculant la valeur de u_n pour un entier n choisi par l'utilisateur (en utilisant la relation obtenue à la question précédente).

   (e) En admettant que la suite (v_n) définie par $v_n = n(u_n - 2)$ converge, déterminer sa limite, et en déduire un équivalent simple de $u_n - 2$.

Exercice 2

Un domino traditionnel est un rectangle séparé en deux carrés sur lesquels sont inscrits deux chiffres compris entre 0 et 6. Pour tout cet exercice, le terme « domino double » désignera un domino dont les deux carrés contiennent le même chiffre et « domino simple » un domino sur lequel sont inscrits deux nombres distincts.

1. Dans un premier temps, on tire simultanément deux dominos dans une boîte contenant un exemple de chaque domino traditionnel (l'ordre des deux carrés sur un domino n'est pas important, il n'y a donc qu'un seul domino $4-5$ par exemple).
   (a) Déterminer le nombre de dominos que contient la boite. Combien parmi eux sont des dominos simples ?
   (b) Combien y a-t-il de tirages possibles au total ?
   (c) Combien de tirages constitués de deux dominos doubles ? D'un double et d'un simple ?
   (d) Combien de tirages pour lesquels le chiffre 1 n'apparait sur aucun des deux dominos ?
   (e) Combien de tirages pour lesquels on obtient deux chiffres 2 sur les deux dominos tirés ?
   (f) Combien de tirages pour lesquels les deux dominos ont (au moins) un chiffre en commun ?
   (g) Combien de tirages pour lesquels la somme des quatre chiffres tirés vaut 5 ?
2. On suppose désormais que les dominos peuvent avoir sur leurs faces des nombres compris entre 0 et $n-1$ (et non plus 0 et 6 comme auparavant). Comme précédemment, on place un exemplaire de chaque domino dans une boite, et eon en tire cette fois-ci trois successivement avec remise.
   (a) Montrer que le nombre de dominos est désormais égal à $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
   (b) Déterminer le nombre total de tirages possibles.
   (c) Combien de tirages pour lesquels obtient au moins un double ?
   (d) Combien de tirages pour lesquels on obtient deux fois exactement le chiffre 0 ?
3. On dispose désormais de dominos jaunes, rouges et verts en nombre aussi grand que nécessaire. On veut construire un mur de dominos de hauteur 2 et de longueur n à l'aide de ces dominos (cf schéma pour un exemple de mur de hauteur 2 et de longueur 5). Un domino vertical sera nécessairement jaune, mais quand on pose deux dominos horizontaux, on a le choix entre mettre un vert au-dessus et un rouge en-dessous, ou le contraire. On note u_n le nombre de murs de longueur n distincts possibles.



   (a) En faisant la liste des cas possibles, déterminer la valeur de u_1, u_2, u_3 et u_4.
   (b) Prouver que, $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+2} = 2u_n + u_{n+1}$.
   (c) En déduire la valeur de u_n en fonction de n.

Exercice 3

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln n$, et $v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$.

1. (a) En étudiant les variations de la fonction $f : x \mapsto \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x}$, prouver que, $\forall n \geqslant 1$, $\ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}$. On **admet** pour la suite de l'exercice que $\forall n \geqslant 2$, $\frac{1}{n} \leqslant \ln n - \ln(n-1)$.

   (b) En déduire que $\forall n \geqslant 1$, $\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n$.

   (c) Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ quand n tend vers $+\infty$.

   (d) En reprenant les résultats de la question 1, déterminer la monotonie des suites (u_n) et (v_n).

   (e) Prouver que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

   (f) En déduire qu'il existe un réel c (qu'on ne cherchera pas à déterminer) tel que $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = \ln n + c + \alpha_n$, avec $\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$.

2. On s'intéresse désormais à la suite (w_n) définie par $w_n = \sum_{k=n+1}^{k=2n} \frac{1}{k}$.

   (a) Calculer (et simplifier) les valeurs de w_0, w_1, w_2 et w_3.

   (b) Déterminer la monotonie de la suite (w_n).

   (c) Prouver que $\forall n \geqslant 1$, $w_n \leqslant 1$.

   (d) En déduire la convergence de la suite (w_n), et un encadrement de sa limite.

   (e) Prouver que $u_{2n} - u_n = w_n - \ln 2$, et en déduire la limite de (w_n).

3. Dans cette dernière partie, on considère une dernière suite (t_n) définie par $t_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = \frac{t_n}{t_n^2 + t_n + 1}$.

   (a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n \in [0; 1]$.

   (b) Étudier la monotonie de (t_n), et en déduire sa convergence.

   (c) Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{t_n} \geqslant n + 1$.

   (d) En déduire à l'aide d'une nouvelle récurrence que, $\forall n \geqslant 1$, $\frac{1}{t_n} \leqslant n + 1 + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.

   (e) En réutilisant les résultats des questions précédentes et ceux de la première partie, déterminer un équivalent simple de t_n.