Devoir Surveillé n°2

ECE3 Lycée Carnot

19 octobre 2010

Durée : 3H. Calculatrices interdites.

Exercice 1 : Calculs divers

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{2k}}$.
2. Déterminer deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{(k-1)(k+1)} = \dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k+1}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2-1}$.
3. Calculer et simplifier la somme double $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (i+j)^3$.
4. Prouver par récurrence que, $\forall n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

Exercice 2

Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies par $u_0 = -2$, $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2v_n$ et $v_{n+1} = 3v_n - u_n$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n$.
2. Déterminer à l'aide de la relation précédente l'expression du terme général de la suite (v_n), puis celui de la suite (u_n).
3. Montrer (sans utiliser les résultats de la question 2.) que la suite $(v_n - u_n)$ est une suite constante et déterminer sa valeur.
4. En déduire une relation de récurrence arithmético-géométrique vérifiée par la suite (u_n), et retrouver la valeur de u_n à l'aide de cette relation.
5. Démontrer, toujours sans utiliser les questions précédentes, que la suite $(2v_n - u_n)$ est géométrique, et déterminer son terme général.

Exercice 3

Le but de l'exercice est de retrouver la formule vue en cours pour la somme des cubes des n premiers entiers, mais par une méthode différentes. On définit pour cela la suite (u_n) de la façon suivante : $u_1 = 1$; $u_2 = 3 + 5$; $u_3 = 7 + 9 + 11$ etc (le terme d'indice n de la suite est la somme des n premiers entiers entiers impairs qui ne sont pas apparus dans l'écriture des termes précédents de la suite).

1. Déterminer la valeur de u_3, u_4 et u_5.
2. Calculer, pour tout entier naturel N, la valeur de $\sum_{k=1}^{k=N}(2k-1)$ (vous avez le droit pour cette question d'utiliser les résultats sur les sommes classiques vus en cours).
3. La somme partielle d'indice n de la suite (u_n), définie par $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k$, vaut $1+(3+5)+(7+9+11)+\dots$. Combien d'entiers impairs y a-t-il dans cette somme ?
4. À l'aide du calcul de la question 2., en déduire la valeur de S_n.
5. Déterminer en utilisant le résultat précédent une expression simple pour u_n, et en déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{k=n} k^3$.

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2(u_n - 2)^2 + 2$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n - 2)$. Montrer que la suite (v_n) est arithmético-géométrique.
3. Déterminer l'expression explicite de v_n, et en déduire celle de u_n.
4. Calculer les sommes partielles de la suite (v_n).
5. En déduire la valeur de $\prod_{k=0}^{k=n}(u_k - 2)$.
6. Démontrer par récurrence (sans utiliser les questions précédentes) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{2^{n+1}-1} + 2$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer la dérivée f' de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3. Montrer que, $\forall x \neq 0$, $f(x) - x = \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2-x+1}+x}$. En déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.
5. Montrer que, $\forall x \in [0;1]$, $0 \leqslant 1 - f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1-x)$.
6. On définit désormais une suite (u_n) par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (c) Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
   (d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant 1 - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1-u_n)$.
   (e) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^n u_0$ (on pourra procéder par récurrence).
   (f) Déterminer à l'aide de l'encadrement précédent une valeur de l'entier n pour laquelle $1 - u_n \leqslant 10^{-10}$.