

Devoir Surveillé n°1 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

30 septembre 2010

Exercice 1

1. En posant $X = x^2$, on se ramène à l'équation $X^2 + X - 20 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 80 = 81$, donc admet deux racines $X_1 = \frac{-1 + 9}{2} = 4$ et $X_2 = \frac{-1 - 9}{2} = -5$. La valeur -5 est à éliminer pour x^2 , donc on a nécessairement $x^2 = 4$, d'où $\mathcal{S} = \{-2; 2\}$.
2. L'inéquation est définie lorsque $x + 2$ et $3x - 6$ sont tous deux strictement positifs, donc pour $x > 3$. Elle revient alors à $\ln \frac{x + 2}{2x - 6} \leq \ln 2$, soit $\frac{x + 2}{2x - 6} \leq 2$, donc $\frac{-3x + 14}{2x - 6} \leq 0$. Un petit tableau de signe mène alors à $\mathcal{S} = \left[\frac{14}{3}; +\infty \right[$.
3. Faisons un petit tableau :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	4	$+\infty$
$ 2x - 1 $	$1 - 2x$	0	$2x - 1$	$2x - 1$
$ 4 - x $	$4 - x$	$4 - x$	0	$x - 4$
$ 2x - 1 + 4 - x $	$5 - 3x$	$x + 3$	$3x - 5$	

Sur l'intervalle de droite, on obtient comme solution de l'équation $x = 0$, qui est valable. L'équation centrale donne $x = 2$ qui est aussi valable. Enfin, celle de droite aboutit à $x = \frac{10}{3}$, qui elle n'appartient pas au bon intervalle. Finalement, $\mathcal{S} = \{0; 2\}$.

4. En faisant tout passer à gauche, on se ramène à $\frac{-5x - 11}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} \geq 0$. Le signe du numérateur est facile à obtenir, mais pour le dénominateur il faut commencer par le factoriser. On constate que -1 est racine du dénominateur : $(-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6 = -1 + 2 + 5 - 6 = 0$. On peut donc écrire $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (a + b)x^2 + (b + c)x + c$. Par identification des coefficients, on a $a = 1$, $b = 1$ et $c = -6$, donc

$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x^2 + x - 6)$. Le dernier facteur a pour discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25$ et admet deux racines $x_1 = \frac{-1 + 5}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{-1 - 5}{2} = -3$. On peut désormais faire un gros tableau de signes :

x	-3	$-\frac{11}{5}$	-1	2
$5x + 1$	-	0	+	+
$x^3 + 2x^2 - 5x - 6$	-	0	+	0
Q	+	0	+	+

Conclusion : $\mathcal{S} =] - \infty; -3[\cup \left[-\frac{11}{5}; -1\right[\cup]2; +\infty[$.

Exercice 2

1. La fonction est définie lorsque $x^2 - 4 > 0$, donc $\mathcal{D}_h =] - \infty; -2[\cup]2; +\infty[$.
2. Le domaine de définition de h est symétrique par rapport à 0, et $h(-x) = h(x)$, donc la fonction h est paire.
3. La fonction $x \mapsto x^2 - 4$ est, comme la fonction carré, décroissante sur $] - \infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. Comme \ln est strictement croissante sur son ensemble de définition, on en déduit que h est strictement décroissante sur $] - \infty; -2[$ et strictement croissante sur $]2; +\infty[$.
4. Cela revient à dire $\ln(x^2 - 4) = \ln 1$, donc $x^2 - 4 = 1$, soit $x^2 = 5$. L'équation admet donc deux solutions : $x = \sqrt{5}$ et $x = -\sqrt{5}$.

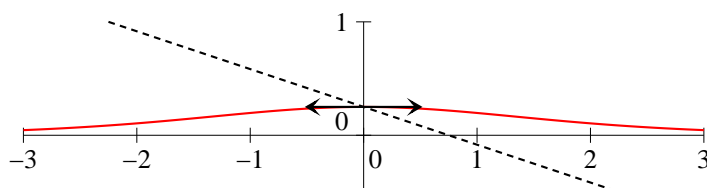
Exercice 3

1. Le dénominateur de f ne s'annulant jamais (puisque $e^x + 1$ est toujours strictement positif), $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Comme $f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{e^{-2x}(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} = f(x)$, la fonction f est paire.
3. Quand x tend vers $-\infty$, le numérateur de f tend vers 0 et son dénominateur vers 1, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. La fonction étant paire, on aura aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (ce qu'on peut retrouver par un calcul direct, par exemple en développant le dénominateur et en factorisant tout par e^x).

4. Calculons donc : $f'(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - 2e^x(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1+e^x) - 2e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$. Le dénominateur de cette dérivée est toujours positif, le signe du numérateur dépend uniquement de celui de $1 - e^x$, qui est positif quand $e^x \leq 1$, c'est-à-dire quand $x \leq 0$. D'où le tableau de variations suivant ($f(0) = \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$) :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f		$\frac{1}{4}$	
		↙ ↘	
		0	

5. Puisque $e^{\ln 2} = 2$, on a $f(\ln 2) = \frac{2}{(1+2)^2} = \frac{2}{9}$, et $f'(\ln 2) = \frac{2(1-2)}{(1+2)^3} = -\frac{2}{27}$. L'équation de la tangente est donc $y = -\frac{2}{27}(x - \ln 2) + \frac{2}{9} = -\frac{2}{27}x + \frac{2}{9}\left(1 + \frac{\ln 2}{3}\right)$.
6. Le fait que $f'(x)$ soit négatif sur cet intervalle a déjà été vu. De plus, $f'(x) + \frac{1}{3} = \frac{3e^x(1-e^x) + (1+e^x)^3}{(1+e^x)^3} = \frac{3e^x - 3e^{2x} + 1 + 3e^x + 3e^{2x} + e^{3x}}{(1+e^x)^3} = \frac{1 + 6e^x + e^{3x}}{(1+e^x)^3} \geq 0$, d'où la deuxième inégalité demandée.
7. Posons $a(x) = f(x) + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}$. Comme $a'(x) = f'(x) + \frac{1}{3} \geq 0$, la fonction a est croissante sur $[0; +\infty[$. Or, $a(0) = f(0) - \frac{1}{4} = 0$, donc la fonction a prend des valeurs positives sur $[0; +\infty[$, ce qui revient à ce qu'on voulait prouver.
8. Voici les courbes, avec la droite en pointillés :

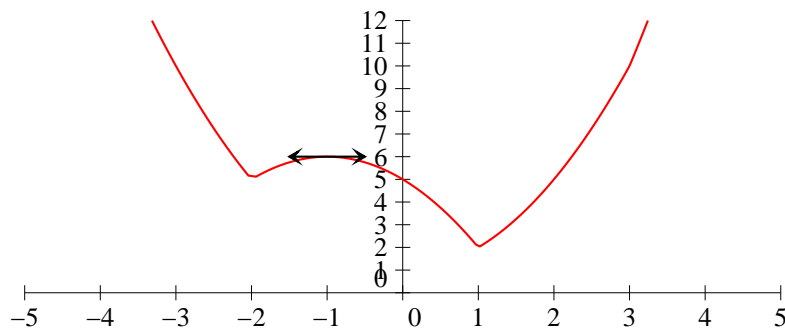


Exercice 4

1. On va avoir besoin de faire un petit tableau : $-x^2 - x + 2$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 8 = 9$, admet donc deux racines $x_1 = \frac{1+3}{-2} = -2$ et $x_2 = \frac{1-3}{-2} = 1$. Le trinome est négatif en-dehors de ses racines.

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$-x^2 - x + 2$	$x^2 + x - 2$	\emptyset	$-x^2 - x + 2$	\emptyset	$x^2 + x - 2$
$ x - 3 $	$3 - x$	$3 - x$	$3 - x$	\emptyset	$x - 3$
$g(x)$	$x^2 + 1$	$-x^2 - 2x + 5$	$x^2 + 1$	$x^2 + 2x - 5$	

2. Il faut étudier séparément chaque expression. La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est décroissante sur $] -\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$, donc g est décroissante sur $] -\infty; -2]$ et croissante sur $[1; 3]$. La fonction $x \mapsto -x^2 - 2x + 5$ a une dérivée égale à $-2x - 2$, qui s'annule pour $x = -1$. Elle est croissante sur $[-2; -1]$ (donc g aussi) et décroissante sur $[-1; 1]$ (donc g aussi). La fonction $x \mapsto x^2 + 2x - 5$, qui est l'opposée de la précédente, est croissante sur $[2; +\infty[$, comme le sera g .
3. On peut calculer les images des valeurs intéressantes : $g(-2) = 5$; $g(-1) = 6$; $g(1) = 2$ et $g(3) = 10$. Toutes les portions de courbes sont des morceaux de parabole, on obtient une courbe qui ressemble globalement à ceci :



4. Graphiquement, il semble que la seule valeur pour laquelle la fonction vaut 2 est $x = 1$. Par le calcul, on résout $x^2 + 1 = 2$, ce qui donne $x = -1$ ou $x = 1$. La première solution n'est pas valide, mais $x = 1$ si. On résout ensuite $-x^2 - 2x + 5 = 2$, soit $x^2 + 2x - 3 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 12 = 16$, et admet donc deux racines $x_3 = \frac{-2+4}{2} = 1$ et $x_4 = \frac{-2-4}{2} = -3$. On retrouve la solution $x = 1$, mais la deuxième n'est pas valide. Enfin, il faut résoudre $x^2 + 2x - 5 = 2$, soit $x^2 + 2x - 7 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 4 + 28 = 32$, donc admet deux racines $x_5 = \frac{-2 + \sqrt{32}}{2} = -1 + 2\sqrt{2}$ et $x_6 = \frac{-2 - \sqrt{32}}{2} = -1 - 2\sqrt{2}$. Aucune de ces

deux solutions n'est supérieure à 3 (c'est évident pour x_6 qui est négative, quant à x_5 , elle est plus petite que $-1 + 2 \times 1,5 = 2$), donc aucune n'est valide. Finalement, nous avons confirmé que la seule solution de l'équation était $x = 1$.