Devoir Surveillé n°10 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

10 juin 2011

Exercice 1 (d'après Ecricome 2000)

1. Puisque les tirages s'effectuent avec remise, la probabilité de tirer une boule blanche sera toujours égale à p, et le temps d'attente de la première boule blanche suivra donc une loi géométrique de paramètre p. De même, $Y \sim \mathcal{G}(r)$.
2. Si $i = j$, on aura bien entendu $P((X = i) \cap (Y = j)) = 0$, puisqu'on ne peut pas tirer simultanément une boule blanche et une rouge pour la première fois. Pour $i < j$, on a $(X = i) \cap (Y = j) = V_1 \cap \cdots \cap V_{i-1} \cap B_i \cap (V_{i+1} \cup B_{i+1}) \cap \cdots \cap (V_{j-1} \cup B_{j-1}) \cap R_j$. La probabilité correspondante vaut donc $u^{i-1} \times p \times (u+p)^{j-i-1} \times r$. De même, si $j < i$, on aura $P((X = i) \cap (Y = j)) = u^{i-1} \times r \times (u+r)^{j-i-1} \times p$. On peut aussi remplacer dans les formules $u+p$ par $1-r$ et $u+r = 1-p$ (tout comme précédemment on peut remplacer les $V_k \cup B_k$ par des $\overline{R_k}$).
3. Au vu des lois trouvées à la première question, $P(X = i) \times P(Y = j) = p(1-p)^{i-1} \times r(1-r)^{j-1}$, ce qui ne correspond pas à la formule obtenue pour $P((X = i) \cap (Y = j))$ (il suffit par exemple de constater que ça ne donne pas 0 lorsque $i = j$). Les deux variables ne sont donc pas indépendantes.
4. Constatons que $D = k$ équivaut à $X - Y = k$ ou $Y - X = k$ (pour $k \geqslant 1$). Commençons par calculer, en utilisant comme toujours pour une somme ou une différence une décomposition sur un système complet d'événements et en reprenant les calculs de la question 2, $P(Y - X = k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = k+i)) = \sum_{i=1}^{+\infty} pu^{i-1}r(1-r)^{k+i-i-1} = pr(1-r)^{k-1} \times \frac{1}{1-u} = \frac{pr(1-r)^{k-1}}{p+r}$ (simple calcul de série géométrique). On obtiendrait de même (il suffit d'inverser le rôle de p et de r), $P(X - Y = k) = \dfrac{pr(1-p)^{k-1}}{p+r}$, d'où la formule de l'énoncé.
5. On constate que $kP(D = k)$ est une somme de deux termes généraux de séries géométriques dérivées convergentes, donc l'espérance existe, et $E(D) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kpr}{p+r}((1-p)^{k-1} + (1-r)^{k-1}) = \frac{pr}{p+r}\left(\frac{1}{(1-(1-p))^2} + \frac{1}{(1-(1-r))^2}\right) = \frac{r}{p(p+r)} + \frac{p}{r(p+r)}$. Or, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{r} - \dfrac{2}{p+r} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+r} + \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p+r} = \dfrac{p+r-p}{p(p+r)} + \dfrac{p+r-r}{r(p+r)} = E(D)$.
6. Au vu des hypothèses de l'énoncé, $p \geqslant \dfrac{1}{4}$ donc $\dfrac{1}{p} \leqslant 4$. De même $\dfrac{1}{r} \leqslant 4$. Enfin, $p + r = 1 - u \leqslant 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$, donc $\dfrac{2}{p+r} \geqslant 83$, et $-\dfrac{2}{p+r} \leqslant -\dfrac{8}{3}$, et $E(D) \leqslant 4 + 4 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{16}{3}$.
7. On veut prouver que $\dfrac{r}{p(p+r)} + \dfrac{p}{r(p+r)} \geqslant 2$, ce qui équivaut à $r^2 + p^2 \geqslant 2pr(p+r)$, soit encore en passant tout à gauche $r^2(1-2p) + p^2(1-2r) \geqslant 0$. Or, comme $r \geqslant \dfrac{1}{4}$, et $u \geqslant \dfrac{1}{4}$, on aura $p = 1 - r - u \leqslant 1 - \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. On en déduit que $1 - 2p \geqslant 0$, et de même pour $1 - 2r$, ce qui prouve la dernière inégalité obtenue et le fait que $E(D) \geqslant 2$.

Exercice 2 (EDHEC 2011)

1. (a) Avoir $X_i = 1$ signifie qu'aucun des n tirages ne s'est produit dans l'urne i, autrement dit que chacun a été effectué dans une des $n-1$ urnes restantes, ce qui se produit avec probabilité $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

   (b) Par le même raisonnement, il faut que chaque tirage soit effectué dans une des $n-2$ urnes restant une fois qu'on a éliminé l'urne i et l'urne j, ce qui se produit avec probabilité $\left(\frac{n-2}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$.

   (c) On a $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \neq 1 - \frac{2}{n}$. À quoi sert ce calcul ? on en déduit que $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} \neq \left(\frac{1}{-}\frac{2}{n}\right)^n$, ce qui suffit à prouver la non indépendance des variables X_i et X_j puisque la première valeur est celle de $P(X_i = 1) \times P(X_j = 1)$, et la seconde celle de $P((X_i = 1) \cap (X_j = 1))$.

2. (a) Chacune des variables X_i suit une loi de Bernouille, d'espérance $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$, et par linéarité de l'espérance, $E(Y_n) = nE(X_i) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

   (b) On a donc $\frac{E(Y_n)}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1-\frac{1}{n})}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $n\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim n \times \left(-\frac{1}{n}\right) \sim -1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{E(Y_n)}{n} = e^{-1} = \frac{1}{e}$. En découle immédiatement que $E(Y_n) \sim \frac{n}{e}$, ce qui signifie que, quand on augmente le nombre d'urnes, la proportion d'urne restant intactes après n tirages se rapproche en moyenne de $\frac{1}{e}$.

3. (a) Cela revient à compter le nombre de fois où on a pioché dans l'urne i, ce qui se produit pour chaque tirage avec une probabilité $\frac{1}{n}$. On a donc $N_i \sim \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{n}\right)$, et $E(N_i) = n \times \frac{1}{n} = 1$.

   (b) Lorsque $X_i = 1$, c'est qu'on n'a jamais tiré dans l'urne i, donc $N_i = 0$ et $N_iX_i = 0$. Si $X_i \neq 1$, c'est que $X_i = 0$ et dans ce cas on a aussi $N_iX_i = 0$. La variable produit est donc nulle.

   (c) Non, sûrement pas, sinon on aurait notamment $E(N_iX_i) = E(N_i) \times E(X_i)$, ce qui n'est pas le cas puisque l'espérance de gauche vaut 0, et celles de droite sont non nulles toutes les deux.

4.
```
Program edhec_2011;
Var x1, n1, n, k, tirage, hasard : integer;
Begin
    Randomize;
    Writeln('donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2');
    Readln(n);
    n1:=0; x1:=1;
    For k:=1 to n do
    begin
        hasard := random(n)+1;
        if hasard = 1 then begin x1 := 0; n1 := n1+1; end;
    end;
    Writeln(x1,n1);
End.
```

Problème (HEC Techno 97)

I. Question préliminaire.

Soit T une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

1. Question de cours : $E(T) = 2$ et $V(T) = \frac{1}{2} \times 4 = 2$. On en déduit en utilisant la formule de König-Huygens dans un sens inhabituel que $E(T^2) = V(T) + E(T)^2 = 2 + 4 = 6$.
2. Puisque $P(T = k) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2^k}$, ce sont des sommes partielles des séries de terme général $kP(T = k)$ et $k^2P(T = k)$, convergeant respectivement vers 2 et 6 d'après la question précédente, donc les inégalités sont évidentes.

II. Étude de la suite de lancers d'une pièce.

1. (a) Commençons par constater que $S_3(\Omega) = T_3(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$. Les probabilités des intersections se calculent sans difficulté, par exemple $P((S_3 = 2) \cap (T_3 = 1)) = P(PPF \cup PFP) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. On obtient le tableau suivant :

$S_3 \backslash T_3$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{8}$	0	0	0
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0
3	0	$\frac{1}{8}$	0	0

   (b) On peut retrouver les lois marginales à partir de la loi de couple, mais ce n'est pas vraiment nécessaire. La variable T_3 suit une loi géométrique « tronquée » puisqu'on s'arrête après trois tirages et que T_3 prend la valeur 0 si aucun Pile n'a encore été tiré. La loi peut être représentée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(T_3 = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

   On calcule sans difficulté $E(T_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{11}{8}$.

   (c) Là, pour le coup, c'est une loi usuelle : $S_3 \sim \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{2}\right)$, et $E(S_3) = \frac{3}{2}$.

   (d) Non, il y a plein de zéros dans le tableau à des endroits correspondant à des probabilités non nulles pour S_3 et T_3.

   (e) • En utilisant le tableau de la loi conjointe,
   $$P(S_3 = T_3) = \sum_{k=0}^{k=3} P((S_3 = k) \cap (T_3 = k)) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + 0 = \frac{3}{8}.$$
   • Revenons à la définition des probabilités conditionnelles :
   $$P_{T_3 \neq 0}(S_3 = T_3) = \frac{P((T_3 = S_3) \cap (T_3 \neq 0))}{P(T_3 \neq 0)} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{2}{7}.$$
   • Encore un petit calcul : $P_{S_3=2}(T_3 = 1) = \dfrac{P((S_3 = 2) \cap (T_3 = 1))}{P(S_3 = 2)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \dfrac{2}{3}$.

   (f) En reprenant le tableau de la loi conjointe et en supprimant les cas où les probabilités sont nulles, on constate que $S_3T_3(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, et la loi de S_3T_3 est donnée par le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4
$P(T_3 = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Par exemple, $P(S_3T_3=2)=P((S_3=1)\cap(T_3=2))+P((S_3=2)\cap(T_3=1))=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$.
Ensuite, on calcule $E(S_3T_3)=\frac{1}{8}+\frac{6}{8}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}=\frac{17}{8}$. Enfin, $\frac{E(S_3T_3)}{E(S_3)E(T_3)}=\frac{17}{8}\times\frac{8}{11}\times\frac{2}{3}=\frac{34}{33}$.

2. Bien évidemment, $P_{S_n=1}(T_n=0)=0$: si on a tiré exactement 1 Pile sur les n lancers, T_n ne peut pas prendre la valeur 0. Pour $k\neq 0$, calculons la probabilité conditionnelle en utilisant le fait que S_n suit une loi binomiale : $P_{S_n=1}(T_n=k)=\frac{P((S_n=1)\cap(T_n=k)}{P(S_n=1)}$. La probabilité du numérateur vaut $\frac{1}{2^n}$ puisqu'un seul tirage correspond à ces conditions (celui où on tire un seul Pile au rang k), donc $P_{S_n=1}(T_n=k)=\frac{1}{2^n\times\binom{n}{1}\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{n}$. Tout ceci est effectivement très prévisible : si on sait qu'on a tiré exactement un Pile, le rang auquel on l'a tiré devrait suivre une loi uniforme sur $\{1;2;\dots;n\}$.

3. (a) On a $T_n(\Omega)=\{0;1;\dots;n\}$. Pour la loi, $P(T_n=0)=\frac{1}{2^n}$ (probabilité de ne tirer que des Face sur les n tirages) et $\forall k\geqslant 1$, $P(T_n=k)=\frac{1}{2^k}$ (probabilité de tirer $k-1$ Face puis un Pile).

   (b) On reconnait une somme géométrique : $f(x)=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Si on dérive l'expression initiale, $f'(x)=\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}$. Si on dérive la deuxième expression,
   $f'(x)=\frac{-(n+1)x^n(1-x)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$.
   Or, $E(T_n)=\sum_{k=0}^{n}kP(T_n=k)=\sum_{k=0}^{n}k\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{n\times\frac{1}{2^{n+1}}-(n+1)\times\frac{1}{2^n}+1}{2(1-\frac{1}{2})^2}=\frac{n}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n-1}}+2=2-\frac{n+2}{2^n}$. Par un argument de croissance comparée assez immédiat, la limite de cette expression est bien égale à 2 quand n tend vers $+\infty$.

   (c) On l'a déjà dit plus haut : $S_n\sim\mathcal{B}\left(n;\frac{1}{2}\right)$, donc $E(S_n)=\frac{n}{2}$.
   L'inégalité $S_nT_n\geqslant S_n$ est évidente dès que $T_n\geqslant 1$, et si $T_n=0$, celà signifie qu'on n'a jamais tiré de Pile, donc que $S_n=0$. dans ce cas, l'inégalité reste vraie : $0\times 0\geqslant 0$. On en déduit que $E(S_nT_n)\geqslant E(S_n)=\frac{n}{2}$.

   (d) Si on sait que $T_n=k$, on sait que les $k-1$ premiers lancers ont donné des Face, et le k-ème un Pile, chacun des $n-k$ lancers restants pouvant toujours donner Pile ou Face avec probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque. La variable S_n peut donc prendre des valeurs comprises entre 1 et $n-k+1$ (on évite d'oublier le Pile imposé au tirage k), et on peut dire que S_n-1 suit une loi binômiale de paramètre $\left(n-k;\frac{1}{2}\right)$. Ou encore que $\forall i\in\{1;2;\dots;n+1-k\}$, $P(S_n=i)=\binom{n-k}{i-1}\frac{1}{2^{n-k}}$.

   (e) La fonction est clairement dérivable, de dérivée $n+1-2x$, et admet donc un maximum en $x=\frac{n+1}{2}$. Puisqu'on sait que T_n prend ses valeurs entre 1 et n et S_n, une fois que $T_n=k$, entre 1 et $n+1-k$, la valeur la plus grande prise par S_nT_n est obtenue quand la valeur de $k(n+1-k)$ est maximale. Si n est impair, $\frac{n+1}{2}$ est un entier, et au vu de l'étude de fonction précédente, le maximum des valeurs prises par S_nT_n vaut $\frac{n+1}{2}\left(n+1-\frac{n+1}{2}\right)=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$. Si n est pair, le maximum de la fonction n'est pas atteint en un entier, les valeurs les plus grandes possibles pour S_nT_n peuvent donc être atteintes pour les deux entiers les plus proches, c'est-à-dire en $\frac{n}{2}$ et en $\frac{n}{2}+1$. Les images de ces deux valeurs par notre fonction sont toutes deux égales à $\frac{n(n+2)}{4} = \frac{n^2+2n}{4} \leqslant \frac{n^2+2n+1}{4} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$. Dans tous les cas, la valeur maximale prise par la variable S_nT_n, et donc son espérance, sont majorées par $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$.

(f) On peut écrire $E(S_nT_n) = \sum_{i,k} ikP((S_n = i) \cap (T_n = k))$ pour tous les couples (i,k) pour lesquels la probabilité de l'intersection est non nulle. C'est-à-dire $E(S_nT_n) = \sum_{i,k} ikP(T_n = k) \times P_{T_n=k}(S_n = i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \sum_{i=1}^{n+1-k} i\binom{n-k}{i-1}\frac{1}{2^{n-k}}$.

4. (a) En découpant simplement la somme, $E(S_nT_n) = \frac{n+2}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k}$. On a vu dans la question préliminaire que la dernière somme était majorée par 6, donc $E(S_nT_n) \geqslant \frac{n+2}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k} - \frac{1}{2}\times 6$, ce qui donne la minoration de l'énoncé. Pour la majoration, il suffit de minorer la deuxième somme par 0, pour obtenir $E(S_nT_n) \leqslant \frac{n+2}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k} \leqslant \frac{n+2}{2}\times 2$, toujours en utilisant les résultats de la question préliminaire.

(b) En divisant l'encadrement par n, on a $\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k} - \frac{3}{n} \leqslant \frac{E(S_nT_n)}{n} \leqslant 1 + \frac{2}{n}$. Le majorant a clairement pour limite 1. Quand au minorant, la parenthèse tend vers $\frac{1}{2}$, la somme vers 2 (toujours les calculs de la question préliminaire), et le $\frac{3}{n}$ vers 0. Le tout tend donc également vers 1, et on peut appliquer le théorème des gendarmes pour conclure que $\lim_{n\to+\infty}\frac{E(S_nT_n)}{n} = 1$.

(c) Au vu des calculs effectués plus haut, $E(S_n)E(T_n) = \frac{n}{2}\left(2 - \frac{n+2}{2^n}\right) = n - \frac{n(n+2)}{2^{n+1}}$. Cette expression est équivalente à n en $+\infty$, donc $\frac{E(S_nT_n)}{E(S_n)E(T_n)} \sim \frac{E(S_nT_n)}{n}$, ce qui tend vers 1 d'après la question précédente. On peut donc tenter d'interpréter les choses en disant que, lorsque n grandit, les variables S_n et T_n ont tendance à se comporter de plus en plus comme des variables indépendantes (pour lesquelles le quotient serait égal à 1). On remarquera, pour $n = 3$, les calculs effectués plus haut donnent déjà une valeur du quotient très proche de 1.