Devoir Surveillé n°10

ECE3 Lycée Carnot

10 juin 2011

Durée : 4H. Calculatrices interdites.

Exercice 1 (d'après Ecricome 2000)

On considère une urne contenant des boules blanches (en proportion p), des boules rouges (en proportion r) et des boules vertes (en proportion u) vérifiant $p \geqslant \frac{1}{4}$, $r \geqslant \frac{1}{4}$, $u \geqslant \frac{1}{4}$ et bien entendu $p + r + u = 1$.

On effectue indéfiniment des tirages successifs d'une boule dans cette urne avec remise entre deux tirages. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note B_n (respectivement R_n, V_n) l'événement « On tire une boule blanche (respectivement rouge, verte) au n-ème tirage ».

On appelle X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche (resp rouge). On définit alors la variable $D = |X - Y|$ égale au nombre de tirages séparant la sortie de la première blanche et de la première rouge.

1. Déterminer la loi de X. Faire de même pour Y.
2. Soient i et j des entiers naturels non nuls. En distinguant les cas $i = j$, $i < j$ et $i > j$, exprimer l'événement $(X = i) \cap (Y = j)$ à l'aide des événements décrits dans l'énoncé. En déduire la loi du couple (X, Y).
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Soit k un entier naturel non nul, montrer l'égalité $P(D = k) = \frac{pr}{p+r}[(1-p)^{k-1} + (1-r)^{k-1}]$.
5. Montrer que D admet une espérance et que $E(D) = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - \frac{2}{p+r}$.
6. Prouver à l'aide de manipulations simples sur les inégalités que $E(D) \leqslant \frac{16}{3}$.
7. Prouver à l'aide de manipulations moins simples que $E(D) \geqslant 2$.

Exercice 2 (EDHEC 2011)

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n tirages, chacun consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.

Pour tout i de $\{1, 2, \dots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n tirages, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. (a) Montrer que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $P(X_i = 1) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$.

   (b) Justifier également que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on a : $P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^n$.

   (c) Comparer $\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, alors les variables X_i et X_j en sont pas indépendantes.

2. On pose $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_i$.

   (a) Déterminer l'espérance de la variable Y_n.

   (b) En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{E(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $E(Y_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Pour tout i de $\{1, 2, \dots, n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.

   (a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $E(N_i)$.

   (b) Que vaut le produit $N_i X_i$?

   (c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

4. Compléter le programme informatique suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par X_1 et N_1 pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
Program edhec_2011;
Var x1, n1, n, k, tirage, hasard : integer;
Begin
    Randomize;
    Writeln('donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2');
    Readln(n);
    n1:=0; x1:=1;
    For k:=1 to n do
    begin
        hasard := random(n)+1;
        if hasard = 1 then begin x1 :=----; n1:= ----; end;
    end;
    Writeln(x1,n1);
End.
```

Problème (HEC Techno 97)

I. Question préliminaire.

Soit T une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

1. Rappeler les valeurs de son espérance et de sa variance ; en déduire la valeur de $E(T^2)$.
2. Déduire de ce qui précède (ou refaire un calcul indépendant) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \leqslant 2 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2^k} \leqslant 6$$

II. Étude de la suite de lancers d'une pièce.

Soit n un entier naturel non nul. On considère l'expérience aléatoire consistant en la succession de n lancers d'une pièce équilibrée, les résultats des différents lancers étant indépendants. Un résultat de cette expérience aléatoire est donc une suite de n Pile ou Face.

On note S_n le nombre de Pile obtenus au cours des n lancers et T_n le rang d'apparition du premier Pile (si on n'obtient aucun Pile lors des n lancers, on décide que $T_n = 0$). Par exemple Si $n = 5$, et qu'on tire successivement Pile, Face, Face, Pile, Face, alors $S_5 = 2$ et $T_5 = 1$; si on a tiré Face, Face, Face, Face, Face, alors $S_5 = 0$ et $T_5 = 0$.

1. Dans cette question $n = 3$.
   (a) Donner la loi du couple (S_3, T_3).
   (b) Donner la loi de T_3 et calculer son espérance.
   (c) Quelle est la loi de S_3 et quelle est son espérance ?
   (d) Les variables S_3 et T_3 sont-elles indépendantes ?
   (e) Calculer les probabilités suivantes :
      - $P(S_3 = T_3)$
      - $P_{T_3 \neq 0}(S_3 = T_3)$
      - $P_{S_3=2}(T_3 = 1)$

   (f) Donner la loi de la variable produit S_3T_3, calculer son espérance et en déduire le quotient $\dfrac{E(S_3T_3)}{E(S_3)E(T_3)}$.
2. Désormais et jusqu'à la fin du problème on revient au cas général où n désigne un entier naturel non nul.
   Pour $k = 0$ puis pour tout entier k compris entre 1 et n, calculer la probabilité conditionnelle $P_{S_n=1}(T_n = k)$. Pourquoi ce résultat était-il intuitivement prévisible ?
3. (a) Préciser les valeurs prises par la variable T_n et donner sa loi.
   (b) Pour $x \in [0, 1[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.
   Donner une autre expression de $f(x)$, puis deux expressions de $f'(x)$.
   En déduire la valeur de l'espérance de T_n en fonction de n et montrer que sa limite quand $n \to \infty$ est égale à 2.
   (c) Reconnaître la loi de S_n et préciser son espérance.
   Justifier l'inégalité $S_nT_n \geqslant S_n$ et en déduire que $E(S_nT_n) \geqslant \dfrac{n}{2}$.
   (d) Déterminer la loi conditionnelle de S_n sachant que $T_n = k$, en précisant en particulier les valeurs que peut alors prendre la variable S_n.

(e) Étudier les variations de la fonction $x \mapsto x(n+1-x)$ définie sur $[0, n+1]$.

En distinguant les cas n pair et n impair, donner la valeur maximale que peut prendre la variable S_nT_n.

En déduire que $E(S_nT_n) \leqslant \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^2$.

(f) À l'aide des résultats obtenus à la question d, exprimer $E(S_nT_n)$ sous forme d'une somme double qu'on ne cherchera pas à calculer.

4. On **admet** que $E(S_nT_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} \times \frac{n-k+2}{2}$.

(a) Utiliser la question préliminaire pour montrer que $\dfrac{n+2}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} - 3 \leqslant E(S_nT_n) \leqslant n+2$.

(b) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{E(S_nT_n)}{n}$.

(c) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{E(S_nT_n)}{E(S_n)E(T_n)}$. Interpréter ce résultat (on comparera notamment au résultat indiquant que, pour deux variables aléatoires indépendantes X et Y, on a $E(XY) = E(X)E(Y)$).