Devoir Surveillé n°1

ECE3 Lycée Carnot

30 septembre 2010

Durée : 2H. Calculatrices interdites

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $x^4 + x^2 - 20 = 0$
2. $\ln(x+2) - \ln(2x-6) \leqslant \ln 2$
3. $|2x-1| + |4-x| = 5$
4. $\dfrac{-x^3 - 2x^2 - 5}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} \geqslant -1$

Exercice 2

Soit h la fonction définie par $h(x) = \ln(x^2 - 4)$.

1. Déterminer le domaine de définition de h.
2. Étudier la parité de h.
3. Déterminer, sans calculer sa dérivée, les variations de la fonction h.
4. Résoudre l'équation $h(x) = 0$.

Exercice 3

Dans tout cet exercice, on cherche à étudier la fonction f définie par l'équation $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la parité de f.
3. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$, et dresser le tableau de variations de la fonction f.
5. Calculer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en son point d'abscisse $\ln 2$.
6. Démontrer que $\forall x \in [0, +\infty[$, $-\dfrac{1}{3} \leqslant f'(x) \leqslant 0$.
7. Montrer à l'aide de la question précédente que $\forall x \in [0, +\infty[$, $-\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{4} \leqslant f(x)$.
8. Tracer dans un même repère la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{4}$, et la courbe représentative de la fonction f.

Exercice 4

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |-x^2 - x + 2| + |x - 3|$.

1. Écrire $g(x)$ sans utiliser de valeur absolue, en distinguant des cas selon la valeur de x.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction g.
4. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'équation $g(x) = 2$.