Concours Blanc : Mathématiques II

ECE Lycée Carnot

Jeudi 19 mai 2011

Durée de l'épreuve : 4H.
Les calculatrices sont **interdites**.

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre qu'il souhaite, à condition d'indiquer clairement les résultats des questions non traitées qu'il admet pour la suite de l'exercice.

Problème 1

Première partie : calcul matriciel.

On considère dans cette partie les matrices M et P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On notera par ailleurs I la matrice identité d'ordre 3.

1. Calculer M^2 et M^3, puis vérifier que $M^3 - 4M^2 - 4M + 16I = 0$.
2. Déduire de la relation précédente que la matrice M est inversible, et donner son inverse.
3. En constatant que 2 en est une solution, résoudre l'équation $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$.
4. En factorisant la relation obtenue à la question 1, prouver alors que la matrice $M - 2I$ n'est pas inversible.
5. On pose pour cette question $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Résoudre le système $MX = 2X$, et retrouver ainsi le résultat de la question précédente.
6. Montrer que la matrice P est inversible, et calculer son inverse P^{-1}.
7. Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale, que l'on notera désormais D.
8. Prouver que, $\forall n \geqslant 1$, $M^n = PD^nP^{-1}$, et en déduire l'expression de la matrice M^n.

Deuxième partie : un problème de probabilités.

Un préparationnaire interrompt chaque soir ses révisions de mathématiques pour dîner, et dispose pour cela de trois options : se faire des pâtes, aller prendre un hamburger au fast-food en bas de chez lui, ou réchauffer au micro-ondes un plat préparé. On observe pendant un certain temps les dîners du préparationnaire, et on constate les phénomènes suivants :

- au jour numéroté 0 où l'on débute l'observation, le préparationnaire a mangé un hamburger.
- s'il mange des pâtes au jour n, le préparationnaire mangera à nouveau des pâtes le lendemain avec probabilité $\frac{1}{2}$, descendra manger un hamburger sinon (mais ne mangera jamais de plat préparé).
- s'il mange un hamburger au jour n, il aura 3 chances sur 4 de manger des pâtes le lendemain, et une chance sur 4 de se faire un plat préparé.
- s'il mange un plat préparé au jour n, il mangera un hamburger ou à nouveau un plat préparé le lendemain, avec probabilité $\frac{1}{2}$ pour chaque.

On note dans tout le problème et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ les évènements suivants :

- A_n : « Le préparationnaire mange des pâtes au jour n ».
- B_n : « Le préparationnaire mange un hamburger au jour n ».
- C_n : « Le préparationnaire mange un plat préparé au jour n ».

On note par ailleurs $a_n = P(A_n)$; $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$, et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

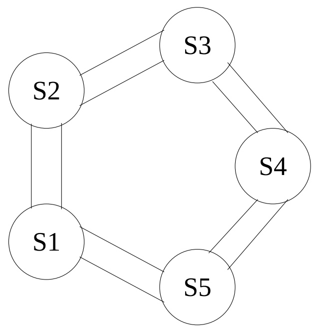
1. Déterminer les probabilités a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2.
2. Quelle relation aura-t-on en général entre a_n, b_n et c_n ?
3. On suppose, pour cette question uniquement, que notre préparationnaire mange à nouveau un hamburger au jour numéro 2. Quelle est alors la probabilité qu'il ait mangé un plat de pâtes au jour 1 ?
4. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lcllll} a_{n+1} & = & \frac{1}{2}a_n & + & \frac{3}{4}b_n & \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{2}a_n & & & + & \frac{1}{2}c_n \\ c_{n+1} & = & & & \frac{1}{4}b_n & + & \frac{1}{2}c_n \end{array} \right.$$

5. En déduire une matrice A telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.
6. Prouver que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.
7. Exprimer A en fonction de la matrice M étudiée dans la première partie du problème, et en déduire les valeurs des probabilités a_n, b_n et c_n.
8. Déterminer les limites de ces probabilités quand n tend vers $+\infty$.
9. Un plat de pâtes contient environ $1,5$ kilocalories, le hamburger 3 kilocalories, et le plat préparé 2 kilocalories. En notant X_n la variable aléatoire donnant le nombre de kilocalories ingérées par notre préparationnaire lors de son dîner, déterminer $E(X_1)$, puis $E(X_n)$, et enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$. Un repas équililibré étant estimé à environ 2 kilocalories, peut-on considérer que notre préparationnaire a une alimentation équilibrée ?

Problème 2

Deux personnes P_1 et P_2 ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5 disposés en pentagone et reliés par des routes, comme l'illustre le schéma ci-dessous. Ils arrivent au rendez-vous à l'heure prévue, mais suite à un malentendu, P_1 se présente au site S_1 et P_2 au site S_2.



Ils décident alors de partir à la recherche l'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes du complexe, avec les règles suivantes :

- à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables ;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément ;
- tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns des autres.

Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.

A. Modélisation du problème

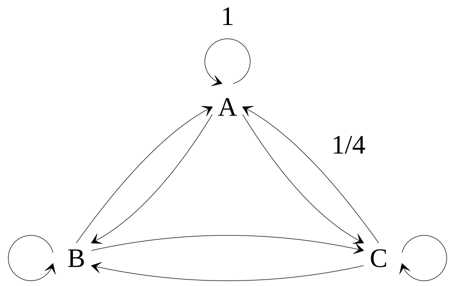
Pour tout entier naturel n, on définit les trois évènements A_n, B_n, C_n :

- A_n : « les deux personnes sont sur le même site après le $n^{\text{ème}}$ déplacement »
- B_n : « les deux personnes sont sur des sites adjacents après le $n^{\text{ème}}$ déplacement »
- C_n : « les deux personnes sont à deux routes de distance après le $n^{\text{ème}}$ déplacement »

On note a_n, b_n, c_n les probabilités des évènements A_n, B_n, C_n.

1. Justifier que A_n, B_n, C_n forment un système complet d'évènements.
2. Déterminer les valeurs de a_0, b_0 et c_0.
3. (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$ et $P_{C_n}(C_{n+1}) = \dfrac{3}{4}$.

   (b) Déterminer toutes les probabilités conditionnelles analogues. On représentera les résultats en reproduisant et complétant le schéma suivant :



4. Etablir les relations suivantes, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} &= \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} &= \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{cases}$
5. (a) Déterminer une relation entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n.
   (b) En déduire une expression de b_n en fonction de n.
   On fera intervenir les nombres $\alpha = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $\beta = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $c_n = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n)$.
6. (a) Exprimer a_n en fonction de n, α et β.
   On pourra s'intéresser à la somme $a_n + b_n + c_n$.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Quelle est la probabilité que les deux personnes ne se retrouvent jamais ?

B. Nombre de déplacements avant rencontre

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de déplacements effectués par chacune des personnes avant leur rencontre sur un même site.

1. Déterminer $X(\Omega)$, l'ensemble des valeurs prises par X.
2. Soit $n \in X(\Omega)$, montrer : $P(X = n) = \dfrac{\sqrt{5}}{20}(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1})$.
3. Calculer l'espérance de X.
4. Calculer la variance et l'écart-type de X.