Concours Blanc : corrigé

Lycée Carnot

5 janvier 2011

Problème 1 : Séries et factorielles

1 Un exemple

1. C'est une récurrence double facile : u_1 et u_2 sont des entiers, et en supposant que u_n et u_{n+1} sont tous les deux entiers, la relation de récurrence implique que $u_{n+2} \in \mathbb{Z}$, ce qui prouve l'hérédité.
2. La suite est récurrente linéaire double, d'équation caractéristique $x^2 - 5x + 6 = 0$. Cette dernière a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$, et admet deux racines $r = \frac{5+1}{2} = 3$ et $s = \frac{5-1}{2} = 2$. On en déduit que $u_n = \alpha 3^n + \beta 2^n$, où α et β, au vu des valeurs initiales, vérifient $3\alpha + 2\beta = 2$ et $9\alpha + 4\beta = 3$. En soustrayant le double de la première équation à la deuxième, on obtient $3\alpha = -1$, soit $\alpha = -\frac{1}{3}$, puis $\beta = \frac{2-3\alpha}{2} = \frac{3}{2}$. Conclusion : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = 3 \times 2^{n-1} - 3^{n-1}$.
3. Les sommes partielles de la série sont données par $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{u_k}{k!} = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{k!} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{3^k}{k!}$. Chacune de ces deux séries est convergente (séries exponentielles, au manque du premier terme près), donc la série étudiée également et sa somme vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} = \frac{3}{2}(e^2 - 1) - \frac{1}{3}(e^3 - 1) = \frac{3}{2}e^2 - \frac{e^3}{3} - \frac{7}{6}$.
4. Si l'équation caractéristique admet deux racines distinctes (discriminant strictement positif), la suite peut se mettre sous la forme $\alpha r^n + \beta s^n$, et les sommes partielles de la série étudiée seront sommes de deux séries exponentielles convergentes. S'il y a une racine double, on peut mettre u_n sous la forme $u_n = (\alpha + \beta n) r^n$, et cette fois les sommes partielles s'écriront $\alpha \sum_{k=1}^{k=n} \frac{r^k}{k!} + \beta s \sum_{k=1}^{k=n} \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}$, qui est encore une fois une somme de deux séries exponentielles convergentes.

2 Série exponentielle

1. Cela se fait très bien par récurrence. Pour $n = 4$, $2^4 = 16$ et $4! = 24$, donc l'inégalité est vérifiée. Si on suppose que, pour un certain entier supérieur ou égal à 4, $2^n \leqslant n!$, alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \leqslant 2 \times n! \leqslant (n+1) \times n! = (n+1)!$, ce qui prouve l'hérédité et achève la récurrence.
2. Pour tout les indices de la somme, au vu de la question précédente, on aura $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^k}$, donc $\sum_{k=4}^{k=n} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=4}^{k=n} \frac{1}{2^k}$, somme géométrique égale à $\frac{1}{2^4} \sum_{k=0}^{k=n-4} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^4} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-3}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{2^{n-3}}\right) \leqslant \frac{1}{8}$.
3. La série exponentielle est une série à termes positifs, majorée au vu de ce qui précède par $\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{8}$. Elle converge donc, et sa limite l vérifie certainement $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \leqslant l \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$, soit $\frac{8}{3} \leqslant l \leqslant \frac{64}{27}$.
4. PROGRAM expo ;
   USES wincrt ;

```
VAR s : real ; i,f,n : integer ;
BEGIN
WriteLn('Choisissez un entier n') ;
ReadLn(n) ;
s := 1 ; f := 1 ;
FOR i := 1 TO n DO
BEGIN
f := f*i ;
s := s+1/f ;
END ;
WriteLn('La valeur de la somme partielle est ',s) ;
END.
```

3 Suites et séries de Cantor

1. On peut écrire (si $p < n$, sinon la somme est bien sûr nulle) $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{k=n} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=p+1}^{k=n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=p+1}^{k=n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{p!} - \frac{1}{n!}$.
2. On a en effet $S_n - S_p = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{u_k}{k!} - \sum_{k=1}^{k=p} \frac{u_k}{k!} = \sum_{k=p+1}^{k=n} \frac{u_k}{k!}$. Or, par hypothèse, on a toujours $\dfrac{u_k}{k!} \leqslant \dfrac{k-1}{k!}$, donc notre expression est bien majorée par la somme calculée précédemment. Par ailleurs, $S_n - S_p \geqslant 0$ puisqu'à partir du rang 2, $\dfrac{u_k}{k!} \geqslant 0$.
3. En particulier, on aura $\forall n \geqslant 2$, $S_n - S_1 \leqslant 1 - \dfrac{1}{n!} \leqslant 1$, soit $S_n \leqslant S_1 + 1$. La suite S_n étant croissante, elle converge.
4. Il suffit de reprendre l'encadrement de la question 2 : $0 \leqslant S_n - S_p \leqslant \dfrac{1}{p!} - \dfrac{1}{n!}$, et de passer à la limite pour obtenir $0 \leqslant S - S_p \leqslant \dfrac{1}{p!}$, ce qui est équivalent à ce qui nous est demandé.

4 Développement de Cantor d'un réel

1. C'est évident au vu de la définition de u_n, puisque les termes de la suite (p_n) sont des entiers.
2. Les inégalités $p_n \leqslant n!x < p_n + 1$ ne sont que la définition de la partie entière. De même, on aura $p_{n-1} \leqslant (n-1)!x < p_{n-1} + 1$, donc $np_{n-1} \leqslant n!x < n(p_{n-1} + 1)$. Le nombre np_{n-1} étant un entier inférieur à $n!x$, il est nécessairement plus petit que p_n (par définition de la partie entière). De même, $n(p_{n-1} + 1)$ est un entier strictement supérieur à $n!x$, donc supérieur ou égal à $p_n + 1$.
3. Le nombre u_1 est certainement entier. De plus, au vu des inégalités précédentes, on aura toujours $0 \leqslant p_n - np_{n-1}$, et $p_n + 1 \leqslant np_{n-1} + n$, soit $p_n - np_{n-1} \leqslant n - 1$. Autrement dit, $0 \leqslant u_n \leqslant n - 1$, ce qui définit bien une suite de Cantor.
4. On se convainc assez facilement que $S_n = \dfrac{p_n}{n!}$, ce qui se prouve par récurrence : $S_1 = \dfrac{u_1}{1!} = p_1$. Ensuite, si on suppose $S_n = \dfrac{p_n}{n!}$, on aura $S_{n+1} = S_n + \dfrac{u_{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{p_n}{n!} + \dfrac{p_{n+1} - (n+1)p_n}{(n+1)!} = \dfrac{p_n}{n!} + \dfrac{p_{n+1}}{(n+1)!} - \dfrac{p_n}{n!} = \dfrac{p_{n+1}}{(n+1)!}$, ce qui prouve l'hérédité. On peut aussi faire un calcul direct de somme télescopique.
5. En divisant par $n!$ les inégalités de la question 2, on a notamment $\dfrac{p_n}{n!} \leqslant x < \dfrac{p_n}{n!} + \dfrac{1}{n!}$. Une simple application du théorème des gendarmes nous donne donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n}{n!} = x$, et la série (S_n) converge vers x.