Concours Blanc : Épreuve de mathématiques

Lycée Carnot

5 janvier 2011

Problème 1 : Séries et factorielles

Dans tout ce problème, on étudie différentes séries ayant une forme proche de celle de la série exponentielle.

1 Un exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. Prouver que, $\forall n \geqslant 1$, $u_n \in \mathbb{Z}$.
2. Déterminer une formule explicite pour u_n.
3. Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{u_n}{n!}$ est convergente, et calculer sa somme.
4. Expliquer pourquoi, quelle que soit la suite (u_n) récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique a un discriminant positif ou nul, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{u_n}{n!}$ sera convergente.

2 Série exponentielle

Le but de cette partie est de prouver la convergence de la série exponentielle et de donner quelques propriétés de sa limite, **sans** utiliser vos connaissances éventuelles sur cette série.

1. Montrer que, $\forall n \geqslant 4$, $n! \geqslant 2^n$.
2. En déduire que, $\forall n \geqslant 4$, $\displaystyle\sum_{k=4}^{k=n} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^3}$.
3. Prouver la convergence de la série exponentielle $\displaystyle\sum \frac{1}{k!}$, et donner un encadrement de sa limite.
4. Écrire un programme PASCAL calculant la somme partielle d'indice n de la série exponentielle, pour un entier n choisi par l'utilisateur.

3 Suites et séries de Cantor

Une suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ d'**entiers** relatifs est appelée suite de Cantor si $u_1 \in \mathbb{Z}$ et $\forall n \geqslant 2$, $0 \leqslant u_n \leqslant n-1$. La série de Cantor associée à une telle suite (u_n) est la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{u_n}{n!}$. On considère dans cette partie une suite de Cantor (u_n) et on note S_n la somme partielle de la série de Cantor associée : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{u_k}{k!}$.

1. Calculer en fonction de n et p la somme $A = \sum_{k=p+1}^{k=n} \frac{k-1}{k!}$ (on pourra utiliser un télescopage).
2. Montrer que, $\forall 1 \leqslant p < n$, $0 \leqslant S_n - S_p \leqslant A$.
3. En déduire que la série de Cantor associée à (u_n) est convergente. On notera S sa limite.
4. Montrer que, $\forall p \geqslant 1$, $S_p \leqslant S \leqslant S_p + \frac{1}{p!}$.

4 Développement de Cantor d'un réel

On considère désormais un réel quelconque x et on note, pour $n \geqslant 1$, $p_n = Ent(n!x)$ (où $Ent(x)$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x). On définit ensuite (u_n) par $u_1 = p_1$ et, $\forall n \geqslant 2$, $u_n = p_n - np_{n-1}$.

1. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, $u_n \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $np_{n-1} \leqslant p_n \leqslant n!x < p_n + 1 \leqslant n(p_{n-1} + 1)$.
3. En déduire que (u_n) est une suite de Cantor.
4. On note comme précédemment S_n la somme partielle de la série de Cantor associée à (u_n) : $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{u_k}{k!}$. Exprimer S_n en fonction de p_n.
5. Prouver que la série converge vers x.