

# Chapitre 15 : Variables aléatoires finies

ECE3 Lycée Carnot

10 mars 2010

## Introduction

Pour introduire cette nouvelle notion, absolument fondamentale en probabilités (tellement d'ailleurs que vous n'entendrez plus parler que de ça jusqu'à la fin de l'année, à peu de choses près), reprenons un exemple extrêmement classique : le lancer de deux dés. On lance donc deux dés, on observe la somme des deux chiffres obtenus et on essaie de déterminer les probabilités de certains événements en relation avec cette somme. Autrement dit, au lieu de travailler directement sur les résultats de l'expérience (sur l'univers  $\Omega$  pour reprendre le vocabulaire consacré, qui serait ici constitué de tous les couples d'entiers compris entre 1 et 6 et aurait pour cardinal 36), on commence par associer à chaque résultat un nombre (ici la somme des deux dés, mais on pourrait prendre le produit, ou s'amuser à faire des choses plus compliquées), et on travaille avec ces nombres. Eh bien, une variable aléatoire, c'est exactement ça : une application qui, à chaque élément de  $\Omega$ , associe un nombre réel.

## 1 Variables aléatoires finies

### 1.1 Définition, notations

**Définition 1.** Soit  $(\Omega, \mathcal{T})$  un espace probabilisable. Une **variable aléatoire** (réelle)  $X$  sur  $\Omega$  est une application  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\forall x \in \mathbb{R}, \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{T}$ .

*Remarque 1.* On note  $X(\Omega)$  l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire  $X$  (qui est bien l'image de l'ensemble  $\Omega$  par l'application  $X$ ).

**Exemple :** L'application qui à chaque français associe sa taille est une variable aléatoire sur l'ensemble de la population française. On a ici  $X(\Omega) \subset [0; 3]$  (j'ai pris large).

**Exemple :** Dans une urne contenant 15 boules noires et 12 blanches, on en tire 4. Si on note  $X$  le nombre de boules noires obtenues lors de ces quatre tirages,  $X$  est une variable aléatoire, et  $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ .

La définition que je viens de donner étant très générale, nous allons très rapidement nous restreindre à un cas particulier : **pour la suite du chapitre, on supposera que l'univers  $\Omega$  est fini**. Dans ce cas, une variable aléatoire sera simplement une application de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  (et même le plus souvent dans  $\mathbb{N}$ ), qui prendra donc nécessairement un nombre fini de valeurs (et on peut oublier la condition technique de la définition générale).

**Définition 2.** Soit  $X$  une variable aléatoire sur un univers  $\Omega$ . On note habituellement  $X = x$ , l'événement  $\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$ . On utilisera de même la notation  $X \leq x$  pour l'événement  $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\}$  (et  $X \geq x$ ;  $X < x$  et  $X > x$  pour des évènements similaires).

**Exemple :** Ainsi, si on reprend l'exemple du lancer de deux dés, avec comme variable aléatoire  $X$  la somme des deux dés, on pourra écrire  $P(X = 4) = \frac{1}{12}$  (il y a trois cas sur les 36 possibles pour lesquels la somme des deux dés donne 4), ou encore  $P(X \geq 10) = \frac{1}{6}$  (six cas valables sur 36).

**Proposition 1.** Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires sur un même univers  $\Omega$ , alors  $X + Y$ ,  $XY$ ,  $\lambda X$  (où  $\lambda$  est un réel quelconque),  $\max(X, Y)$  et  $\min(X, Y)$  sont également des variables aléatoires.

Pas de démonstration, c'est évident, ce sont aussi des applications de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Proposition 2.** Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, alors  $g(X) : \omega \mapsto g(X(\omega))$  est aussi une variable aléatoire (notée  $g(X)$ ).

**Exemple :** Dans un cinéma, on observe le nombre de spectateurs assistant à chacune des quatre séances quotidiennes pendant 20 jours de suite. On note  $X_1$  le nombre de spectateurs de la première séance (l'ensemble  $\Omega$  étant ici celui constitué des 20 jours que dure l'étude),  $X_2$ ,  $X_3$  et  $X_4$  les nombres de spectateurs des séances suivantes. La variable  $X = \max(X_1, X_2, X_3, X_4)$  associera à chaque jour d'étude le nombre de spectateurs de la séance la plus remplie du jour.

## 1.2 Loi d'une variable aléatoire

L'intérêt des variables aléatoires est bien entendu d'étudier la probabilité d'apparition de chacun des résultats possibles :

**Définition 3.** Soit  $X$  une variable aléatoire, la **loi de probabilité** de  $X$  est la donnée des probabilités  $P(X = k)$ , pour toutes les valeurs  $k$  prises par  $X$  (c'est-à-dire pour  $k \in X(\Omega)$ ).

*Remarque 2.* Pour calculer la loi d'une variable aléatoire, il suffit donc de déterminer toutes les valeurs qu'elle peut prendre, puis calculer la probabilité de chaque résultat.

**Exemple :** Reprenons notre exemple de la somme de deux dés. On peut présenter la loi de  $X$  sous la forme d'un tableau :

$k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

**Proposition 3.** Les événements  $(X = k)_{k \in X(\Omega)}$  forment un système complet d'événements. On a donc  $\sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$ .

*Démonstration.* Ces événements sont incompatibles (on ne peut pas avoir à la fois  $X(\omega) = k$  et  $X(\omega) = k'$  pour des valeurs différentes de  $k$  et  $k'$ ). Leur réunion est bien  $\Omega$  tout entier puisque chaque élément  $\omega$  de  $\Omega$  a une image par  $X$ .  $\square$

**Exemple :** On lance six fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et on note  $X$  le nombre de Piles obtenus. Dans ce cas,  $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ , et le nombre de tirages (sur les 64 possibles) contenant  $k$  Piles vaut  $\binom{6}{k}$  (il suffit de choisir la position des  $k$  Piles parmi les 6 lancers), d'où la loi suivante :

$k$	0	1	2	3	4	5	6
$P(X = k)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{20}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{1}{64}$

**Exemple :** Dans une urne se trouvent cinq jetons numérotés de 1 à 5. On en tire 3 simultanément et on note  $X$  le plus petit des trois numéros tirés. On a ici  $X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$  (si on tire trois jetons, le plus petit ne peut pas être plus grand que 3). Pour déterminer la loi, le plus simple est de dénombrer tous les cas possibles (il n'y en a que 10), même si on peut exprimer les probabilités à l'aide de coefficients binomiaux (par exemple, pour avoir  $X = 1$ , il faut tirer le jeton 1 puis deux autres parmi les 4 restants, soit  $\binom{4}{2}$  tirages favorables sur les  $\binom{5}{3}$ ). on obtient en tout cas :

$k$	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

**Exemple :** On lance deux fois de suite un dé à quatre faces (si, si, ça existe). On note  $X$  la variable aléatoire égale à la différence (en valeur absolue) des résultats deux lancers. On a ici  $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$ , et la loi de  $X$  est la suivante :

$k$	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

### 1.3 Fonction de répartition

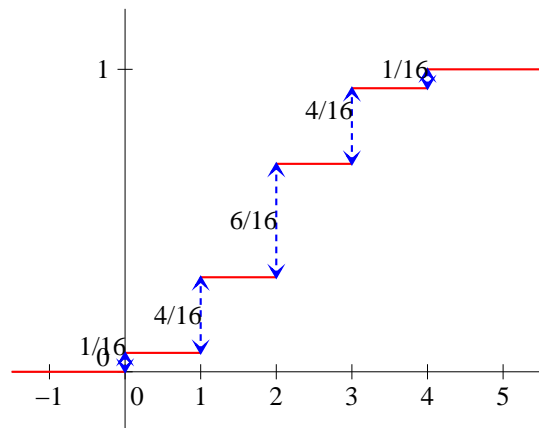
La fonction de répartition est simplement une autre façon de représenter la loi d'une variable aléatoire. Dans le cas des lois finies, elle n'apporte absolument aucune information supplémentaire, et son utilité est donc limitée. Mais vous verrez (surtout l'an prochain) que c'est une notion essentielle dans le cadre des variables aléatoires continues, où la représentation de la loi sous forme de tableau n'a plus de sens.

**Définition 4.** La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire  $X$  est la fonction  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F_X(x) = P(X \leq x)$ .

**Exemple :** Reprenons une suite de lancers de pièce équilibrée, et limitons-nous à quatre lancers. On veut tracer la courbe de la fonction de répartition de la variable  $X$  donnant le nombre de Piles obtenus lors de ces quatre lancers. La loi de  $X$  est donnée par le tableau suivant :

$k$	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

La courbe de  $F_X$  ressemble à ceci (à chaque fois qu'on atteint une des valeurs appartenant à  $X(\Omega)$ , on fait un bond dont la hauteur est la probabilité correspondante) :



**Proposition 4.** Si  $X$  est une variable aléatoire finie, la fonction  $F_X$  est une fonction en escalier (c'est-à-dire qu'on peut découper  $\mathbb{R}$  en un nombre fini d'intervalles sur lesquels la fonction est constante), dont les sauts se produisent pour les valeurs  $k$  appartenant à  $X(\Omega)$  et ont pour hauteur  $P(X = k)$ . Dans le cas général, une fonction de répartition vérifie toujours les propriétés suivantes :

- La fonction  $F_x$  est croissante.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ .
- La fonction  $F_x$  est continue à droite en tout réel.

**Proposition 5.** Lien entre loi et fonction de répartition.

Soit  $X$  une variable aléatoire de fonction de répartition  $F_X$ . Alors

- $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \sum_{k \in X(\Omega) | k \leq x} P(X = k)$

- dans l'autre sens,  $\forall k \in X(\Omega), P(X = k) = F_X(k) - \lim_{x \rightarrow k^-} F_X(x)$

On a plus généralement, pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $P(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x)$ .

**Exemple :** Pour mieux comprendre l'intérêt de cette notion, prenons un exemple continu (sans l'étudier en détail). On note  $X$  la variable aléatoire donnant le temps d'attente (en heures) d'un client aléatoire à un guichet de la Poste. On suppose pour fixer les idées que  $X(\Omega) = [0; 4]$  (au bout de 4 heures, le client en aura vraiment assez d'attendre). Pour ce genre de variable aléatoire, la fonction  $F_X$  ne sera plus une fonction en escalier mais simplement une fonction croissante « ordinaire » (elle a par exemple toutes les chances de ne pas comporter de sauts comme dans le cas d'une variable finie, mais plutôt d'être continue). Déterminer la probabilité d'attendre entre 1 et 2 heures au guichet revient d'après la dernière formule donnée dans la propriété précédente à calculer  $F_X(2) - F_X(1)$ .

## 1.4 Moments d'une variable aléatoire

Lorsqu'on s'intéresse à une variable aléatoire pouvant prendre un grand nombre de valeurs (et même dans les autres cas!), il peut être intéressant de donner, en plus de la loi de la variable qui ne sera pas toujours une donnée très lisible, des caractéristiques d'ensemble de cette loi, comme la moyenne des valeurs prises (pondérées par leur probabilité d'apparition). Ces paramètres sont les mêmes que ceux qu'on étudie en statistiques, nous allons plus particulièrement nous intéresser à l'espérance (qui n'est autre que la moyenne évoquée plus haut, c'est un paramètre de position) et à l'écart-type (paramètre de dispersion, qui mesure la répartition des valeurs autour de l'espérance).

### 1.4.1 Espérance

**Exemple :** En colles avec M. Conduché, un élève estime avoir :

- une chance sur 4 d'avoir un exercice qu'il maîtrise et d'obtenir une note de 15.
- une chance sur 4 d'avoir un exercice incompréhensible mais d'attendrir le colleur et avoir 13.
- une chance sur 2 d'avoir un exercice incompréhensible et de sauver un 10 grâce à sa connaissance parfaite du cours.

La note moyenne que peut espérer avoir cet élève à sa colle est de  $\frac{1}{4} \times 15 + \frac{1}{4} \times 13 + \frac{1}{2} \times 10 = 12$ . Ce calcul est un calcul d'espérance mathématique, celle de la variable aléatoire donnant la note de l'élève à sa colle.

**Définition 5.** L'espérance d'une variable aléatoire  $X$  est définie par la formule

$$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kP(X = k)$$

*Remarque 3.* Il s'agit bel et bien d'un calcul de moyenne avec coefficients égaux à  $P(X = k)$ , la somme des coefficients valant ici 1.

**Exemple :** Reprenons l'exemple de six lancers consécutifs de pièce, où  $X$  était le nombre de Pile obtenu. On aura  $E(X) = 0 \times \frac{1}{64} + 1 \times \frac{3}{64} + 2 \times \frac{15}{64} + 3 \times \frac{5}{16} + 4 \times \frac{15}{64} + 5 \times \frac{3}{32} + 6 \times \frac{1}{64} = 3$ . Le résultat est bien conforme à l'intuition qu'on a de la moyenne de la variable aléatoire  $X$ .

**Exemple :** Lors d'une tombola, 1000 personnes ont misé 2 euros. Il y a 100 personnes qui gagnent un lot d'une valeur de 5 euro, 10 gagnent un lot d'une valeur de 10 euros, 3 personnes gagnent un lot d'une valeur de 100 euros et enfin une personne gagne le gros lot, d'une valeur de 600 euros. Naturellement, les 886 personnes restantes ne gagnent rien. On note  $X$  la variable aléatoire correspondant au gain. On a  $E(X) = 0 \times \frac{886}{1000} + 5 \times \frac{100}{1000} + 10 \times \frac{10}{1000} + 100 \times \frac{3}{1000} + 600 \times \frac{1}{1000} = 1.5$ . Autrement dit, chaque participant gagnera en moyenne 1.5 euro, ou plutôt en perdra 0.5 sur les deux qu'il avait misés. On comprend mieux sur cet exemple l'origine du terme espérance, et accessoirement la façon dont la Française des Jeux se remplit les poches.

**Définition 6.** Soit  $A$  un évènement inclus dans notre univers  $\Omega$ . On appelle **variable indicatrice de l'évènement**  $A$ , et on note  $\mathbf{1}_A$ , la variable aléatoire définie par  $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$  si  $\omega \in A$ , et  $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$  sinon.

**Proposition 6.** La variable aléatoire constante  $X : \omega \mapsto a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , a une espérance  $E(X) = a$ . L'espérance d'une variable aléatoire indicatrice  $\mathbf{1}_A$  vaut  $P(A)$ .

*Démonstration.* C'est bien parce que je suis consciencieux que je fais une preuve. Dans le premier cas, la loi de  $X$  est simple :  $a$  avec probabilité 1. On a donc  $E(X) = 1 \times a = a$  en appliquant la définition de l'espérance. Dans le second, la loi de  $\mathbf{1}_A$  est à peine plus compliquée, 1 si  $\omega \in A$  c'est-à-dire avec probabilité  $P(A)$  et 0 sinon, donc avec probabilité  $1 - P(A)$ . L'espérance vaut bien  $P(A)$ .  $\square$

**Proposition 7.** Linéarité de l'espérance.

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires définies sur le même univers  $\Omega$ , et  $a, b$  deux réels, on a  $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ . En particulier, on aura toujours  $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$ ;  $E(aX) = aE(X)$ , ou encore en utilisant l'espérance d'une variable constante calculée plus haut,  $E(X + b) = E(X) + b$ .

*Démonstration.* La preuve est un peu formelle et sera esquivée cette année.  $\square$

**Exemple :** Cette propriété très simple est mine de rien bien utile (c'est même la propriété fondamentale à maîtriser sur l'espérance). On lance par exemple successivement 90 dés. On note  $X$  le nombre de 6 obtenus. Calculer l'espérance directement demande un certain courage (la loi de  $X$  est une horreur absolue), mais on peut ruser ! Notons  $A_i$  l'évènement « On tire un 6 au lancer numéro  $i$  » et  $\mathbf{1}_{A_i}$  la variable indicatrice correspondante. On peut constater que  $X = \mathbf{1}_{A_1} + \mathbf{1}_{A_2} + \dots + \mathbf{1}_{A_{90}}$  (en effet, additionner les variables indicatrices revient à ajouter 1 à chaque fois qu'un 6 sort, et 0 sinon, ce qui revient exactement à compter le nombre de 6). On a donc  $E(X) = E(\mathbf{1}_{A_1}) + E(\mathbf{1}_{A_2}) + \dots + E(\mathbf{1}_{A_{90}}) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_{90}) = \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{6} = \frac{90}{6} = 15$  (résultat intuitivement évident, soit dit en passant).

**Définition 7.** Une variable aléatoire  $X$  est dite **centrée** si  $E(X) = 0$ .

**Proposition 8.** Si  $X$  est une variable aléatoire d'espérance  $m$ , la variable aléatoire  $X - m$  est centrée. On l'appelle **variable aléatoire centrée associée à  $X$** .

*Démonstration.* Par linéarité,  $E(X - m) = E(X) - E(m) = m - m = 0$ .  $\square$

**Proposition 9.** Si  $X$  est une variable aléatoire positive (c'est-à-dire que  $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ ), on a  $E(X) \geq 0$ . Si  $X, Y$  sont deux variables aléatoires telles que  $X \leq Y$  (c'est-à-dire que  $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leq Y(\omega)$ ), alors  $E(X) \leq E(Y)$ .

*Démonstration.* C'est une fois de plus évident. Tous les termes intervenant dans le calcul de l'espérance de  $X$  étant positifs, la somme sera nécessairement positive. Pour la deuxième propriété, on peut utiliser une ruse classique : si  $X \leq Y$ , la variable aléatoire  $Y - X$  est positive, donc  $E(Y - X) \geq 0$ . Or,  $E(Y - X) = E(Y) - E(X)$ , ce qui nous donne l'inégalité voulue.  $\square$

**Théorème 1.** (théorème du transfert) Soit  $X$  une variable aléatoire et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, alors on a  $E(g(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k)P(X = k)$ .

*Démonstration.* On admettra ce résultat qui est un peu technique à prouver. C'est évident dans le cas où les images par  $g$  des valeurs  $k$  sont distinctes, mais un peu plus pénible à rédiger dans le cas général.  $\square$

### 1.4.2 Moments d'ordre supérieur

**Définition 8.** Soit  $X$  une variable aléatoire et  $r$  un entier strictement positif, le **moment d'ordre  $r$**  de  $X$ , noté  $m_r(X)$ , est l'espérance de la variable aléatoire  $X^r$ . Autrement dit (en utilisant le théorème du transfert)  $m_r(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^r P(X = k)$ .

*Remarque 4.* Le moment d'ordre 1 de  $X$  n'est autre que l'espérance de  $X$ .

**Définition 9.** La **variance**  $V(X)$  d'une variable aléatoire  $X$  est le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire centrée associée à  $X$ . Autrement dit,  $V(X) = E((X - E(X))^2)$ . L'écart-type  $\sigma$  de la variable aléatoire  $X$  est défini par  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .

Que représente cette variance? Il s'agit, techniquement, d'une moyenne de carrés d'écart à la moyenne. Pourquoi prendre le carré? Tout simplement car la moyenne des écarts à la moyenne est nulle. Pour réellement mesurer ces écarts, il faut « les rendre positifs », ce qui se fait bien en les élevant au carré. On pourrait également penser à prendre leur valeur absolue, mais cela aurait moins de propriétés intéressantes pour le calcul. Par contre, pour « effacer » la mise au carré, on reprend ensuite la racine carrée du résultat obtenu pour définir l'écart-type. L'écart-type représente donc (comme son nom l'indique) un écart moyen entre les valeurs prises par  $X$  et la moyenne de  $X$  (plus il est grand, plus les valeurs prises par  $X$  sont étalées).

**Proposition 10.** La variance d'une variable aléatoire est toujours positive.

On a la formule  $V(aX + b) = a^2V(X)$ .

*Démonstration.* La première propriété découle immédiatement de la définition du moment d'ordre 2, qui est une somme de termes positifs. Pour la deuxième, c'est du calcul un peu formel. Il faut calculer l'espérance de  $(aX + b - E(aX + b))^2$ . Or, par linéarité de l'espérance,  $E(aX + b) = aE(X) + b$  dont l'expression précédente vaut  $(aX + b - aE(X) - b)^2 = a^2(X - E(X))^2$ , dont l'espérance vaut  $a^2E((X - E(X))^2) = a^2V(X)$ .  $\square$

*Remarque 5.* Une variable aléatoire a une variance (et un écart-type) nulle si et seulement si elle est constante.

**Théorème 2.** Théorème de König-Huygens :  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ .

*Démonstration.* C'est à nouveau un calcul très formel :  $(X - E(X))^2 = X^2 - 2E(X)X + (E(X))^2$ , donc, par linéarité de l'espérance,  $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(E(X))^2 = E(X^2) - 2E(X)^2 + (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$ .  $\square$

*Remarque 6.* En pratique, c'est à peu près systématiquement via la formule de König-Huygens que nous effectuerons nos calculs de variance.

**Définition 10.** Une variable aléatoire est dite **réduite** si son écart-type (et donc sa variance) vaut 1.

**Proposition 11.** Si  $X$  est une variable aléatoire, la **variable aléatoire centrée réduite associée** à  $X$  est  $X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$  (qui est, vous vous en seriez doutés, centrée et réduite).

*Démonstration.* On a déjà vu plus haut que  $X - E(X)$  était centrée, la diviser par l'écart-type ne va pas changer cela. De plus,  $V\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}\right) = \left(\frac{1}{\sigma(X)}\right)^2 V(X) = 1$   $\square$

**Exemple :** il me manquait trop, je n'ai pas pu résister au plaisir de vous remettre une dernière fois le désormais célèbre exemple du lancer de deux dés, où la variable aléatoire  $X$  est égale à la somme des deux dés. On a  $E(X) = 7$  (logique) donc  $V(X) = \sum_{2 \leq i \leq 12} (i - 7)^2 P(X = i) = \frac{35}{6}$  (calcul peu passionnant). L'écart-type vaut donc  $\sigma(X) \simeq \sqrt{\frac{35}{6}} \simeq 2.415$ .

## 2 Lois usuelles finies

Certaines lois de probabilité interviennent suffisamment régulièrement lorsqu'on étudie des variables aléatoires dans des cas classiques (lancers de dés ou de pièces, tirages de boules dans des urnes, bref toutes les bêtises qu'on aime bien vous infliger dans les exercices de probas) pour qu'il soit intéressant de les étudier une bonne fois pour toutes (et accessoirement de leur donner un nom) et d'en retenir les caractéristiques (espérance et variance notamment). Nous en étudierons quatre dans ce chapitre, et deux autres quand nous aurons étudié de façon plus approfondie les variables aléatoires infinies.

### 2.1 Loi uniforme

**Définition 11.** On dit que la variable aléatoire  $X$  suit une **loi uniforme sur**  $\{1; \dots; n\}$ , et on note  $X \sim \mathcal{U}(\{1; \dots; n\})$ , si  $X(\Omega) = \{1; \dots; n\}$  et  $\forall k \in \{1; \dots; n\}$ ,  $P(X = k) = \frac{1}{n}$ .

**Exemple fondamental :** On tire un dé équilibré à  $n$  faces et on note  $X$  le nombre tiré.

**Proposition 12.** Si  $X \sim \mathcal{U}(\{1; \dots; n\})$ , on a  $E(X) = \frac{n+1}{2}$  et  $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$ .

*Démonstration.* Pour l'espérance, on a  $E(X) = \sum_{k=1}^{k=n} k \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$ .

Pour la variance, on va utiliser la formule de König-Huygens. On a  $E(X^2) = \sum_{k=1}^{k=n} k^2 \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$  donc  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} = \frac{4n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{12} = \frac{n^2 - 1}{12}$ .  $\square$

*Remarque 7.* À partir d'une loi uniforme prenant ses valeurs entre 1 et  $n$ , on construit facilement une loi dont la probabilité est uniforme entre deux entiers  $m$  et  $p$  (il suffit d'ajouter une constante).

La loi ainsi construite a une espérance égale à  $\frac{a+b}{2}$  et une variance égale à  $\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$ .

### 2.2 Loi de Bernoulli

**Définition 12.** On dit que la variable aléatoire  $X$  suit une **loi de Bernoulli de paramètre**  $p$  (avec  $p \in [0; 1]$ ) si  $X(\Omega) = \{0; 1\}$ ;  $P(X = 1) = p$  et  $P(X = 0) = 1 - p$ . On le note  $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ .

**Exemple fondamental :** On lance une pièce mal équilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut  $p$  et on note  $X$  la variable aléatoire valant 1 si on tombe sur Pile et 0 si on tombe sur face.

*Remarque 8.* Cette loi est aussi appelée loi indicatrice de paramètre  $p$ , puisqu'elle apparaît essentiellement dans le cas où  $X$  est la variable aléatoire indicatrice d'un événement.

**Proposition 13.** Si  $X \sim \mathcal{B}(1, p)$ , alors  $E(X) = p$  et  $V(X) = p(1-p)$ .

*Démonstration.* Pour l'espérance, on a déjà fait le calcul un peu plus haut. On a par ailleurs de la même façon  $E(X^2) = p$ , donc  $V(X) = p - p^2 = p(1-p)$ .  $\square$

*Remarque 9.* On utilise surtout en pratique des sommes de variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli, comme on a déjà pu le faire dans le cas du lancer successif de 90 dés.

## 2.3 Loi binômiale

**Définition 13.** On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit une **loi binomiale de paramètre**  $(n, p)$  (avec  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [0; 1]$ ) si  $X(\Omega) = \{0; \dots; n\}$  et  $\forall k \in \{0; \dots; n\}$ ,  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ . On le note  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ .

**Exemple fondamental :** Une urne contient des boules blanches et noires, avec une proportion  $p$  de boules blanches. On tire  $n$  boules **avec remise** dans l'urne et on note  $X$  le nombre de boules blanches obtenues.

*Remarque 10.* Si  $n = 1$ , la loi binomiale de paramètre  $(1, p)$  n'est autre que la loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , ce qui justifie l'emploi de la même notation.

*Remarque 11.* Une autre façon de voir une loi binômiale est de considérer que la variable aléatoire correspondante compte le nombre de réussites quand on tente  $n$  fois de suite (de façon indépendante) un tirage ayant une probabilité  $p$  de réussir.

**Proposition 14.** Si  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ , alors  $E(X) = np$  et  $V(X) = np(1-p)$  (on note parfois  $q = 1-p$ , auquel cas on a  $V(X) = npq$ ).

*Démonstration.* On a  $E(X) = \sum_{k=1}^{k=n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ . On aimerait bien appliquer le binôme de Newton, mais il faut pour cela faire disparaître le  $k$ , ce qui est par exemple possible grâce à la formule  $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ . On a donc  $E(X) = \sum_{k=1}^{k=n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = n \sum_{j=0}^{j=n-1} p^{j+1} (1-p)^{n-1-j} = np(p+1-p)^{n-1} = np$ .

Pour la variance, on ne va pas calculer  $E(X^2)$  directement, mais passer par  $E(X(X-1))$ , ce qui va permettre d'utiliser la formule  $k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$  (obtenue en appliquant deux fois de suite la formule utilisée dans le calcul précédent). Un calcul extrêmement similaire au précédent donne alors  $E(X(X-1)) = n(n-1)p^2$ , donc  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1) + X) - E(X)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p)$   $\square$

*Remarque 12.* Une somme de  $n$  variables aléatoires indépendantes (je vous donnerai la définition au prochain chapitre, mais vous pouvez deviner tous seuls de quoi il s'agit) suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  suit une loi binomiale de paramètre  $(n, p)$ . Notez qu'on peut utiliser cette remarque pour calculer l'espérance d'une loi binomiale très rapidement (c'est exactement ce qu'on a fait quand on a calculé plus haut l'espérance du nombre de 6 lors de 90 lancers de dés).

## 2.4 Loi hypergéométrique

**Définition 14.** On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit une **loi hypergéométrique de paramètre**  $(N, n, p)$  (avec  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $1 \leq n \leq N$  et  $p \in [0; 1]$ ) si  $X(\Omega) = \{\max(0, n - Nq); \dots; \min(n, Np)\}$  (où on a noté  $q = 1-p$ ) et  $\forall k \in \{\max(0, n - Nq); \dots; \min(n, Np)\}$ ,  $P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ . On

le note  $X \sim \mathcal{H}(N, n, p)$ .

**Exemple fondamental :** Dans une urne se trouvent  $N$  boules blanches et noires, avec une proportion  $p$  de boules blanches. On tire  $n$  boules dans l'urne **sans remise** (ou simultanément) et on note  $X$  le nombre de boules blanches obtenues.

**Proposition 15.** Si  $X \sim \mathcal{H}(N, n, p)$ , alors  $E(X) = np$  et  $V(X) = npq \frac{N-n}{N-1}$ .



*Démonstration.* Pour simplifier les notations, tous les coefficients binomiaux faisant intervenir des entiers négatifs seront considérés comme nuls. On utilise le même type d'astuce que pour la loi binomiale :

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \frac{\binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{Np}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^n \binom{Np-1}{k-1} \binom{Nq}{n-k} = \frac{Np}{\binom{N}{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{Np-1}{j} \binom{Nq}{n-1-j}$$

On peut maintenant appliquer la formule de Vandermonde à notre somme et on obtient

$$E(X) = Np \frac{\binom{Np+Nq-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = Np \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = NP \times \frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} \times \frac{(N-n)!}{N!n!} = Np \frac{n}{N} = np$$

Pour la variance, on utilise à nouveau les mêmes astuces. On commence par calculer

$$E(X(X-1)) = Np(Np-1) \frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}} = Np(Np-1) \times \frac{(N-2)!}{(n-2)!(N-n)!} \times \frac{n!(N-n)!}{N!} = \frac{p(Np-1)n(n-1)}{N-1}$$

comme ci-dessus, puis

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \frac{p(Np-1)n(n-1)}{N-1} + np - n^2p^2 \\ &= np \frac{(Np-1)(n-1) + N-1 - np(N-1)}{N-1} = np \frac{nNp - Np - n + 1 + N - 1 - nNp + np}{N-1} \\ &= np \frac{N - n - Np + np}{N-1} = np \frac{(1-p)(N-n)}{N-1} = npq \frac{N-n}{N-1} \end{aligned}$$

□