Chapitre 9 : systèmes linéaires

ECE3 Lycée Carnot

4 décembre 2009

1 Vocabulaire

Définition 1. Une **équation linéaire** à n inconnues x_1, x_2, …, x_n est une équation du type $a_1x_1 + \dots a_nx_n = b$, avec $(a_1, \dots, a_n, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Définition 2. Un **système** de p équations linéaires à n inconnues est constitué de p équations du type précédent. On le note habituellement de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}x_1 & + & a_{p2}x_2 & + & \dots & a_{pn}x_n & = & b_p \end{array}\right.$$

Autrement dit, on note a_{ij} le coefficient de l'inconnue x_j dans la i-ème équation.

Définition 3. **Résoudre** un système de p équations à n inconnues revient à déterminer tous les n-uplets de réels $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ vérifiant simultanément les p équations du système.

Remarque 1. Quand on donne les solutions d'un système, il est très important de donner le n-uplet dans le « bon ordre ». Par exemple, pour le système $\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & - & 3y & = & 1 \\ x & + & 2y & = & 4 \end{array}\right.$, le couple $(2; 1)$ est solution, mais pas le couple $(1; 2)$. On a en fait $\mathcal{S} = \{(2; 1)\}$ (les parenthèses sont indispensables, il y a une seule solution qui est un couple de réels).

Définition 4. Un système est **incompatible** s'il n'admet aucune solution. Un système est appelé **système de Cramer** s'il admet exactement une solution.

Exemples : Le système suivant est un système incompatible :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & 7 \\ 2x & - & 5y & + & z & = & -4 \\ 3x & - & 3y & - & 2z & = & 1 \end{array}\right.$$

En effet, si l'on effectue la somme des deux premières lignes et que l'on soustrait la troisième, on obtient $0 = 2$, ce qui est impossible.

Le système vu lors de la remarque précédente est un système de Cramer. Il existe également des systèmes admettant une infinité de solution, par exemple :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & - & y & = & 2 \\ -4x & + & 2y & = & -4 \end{array}\right.$$

En effet, les deux équations sont proportionnelles, donc équivalentes. On peut simplement exprimer y en fonction de x (ou le contraire) : $y = 2x - 1$, donc $\mathcal{S} = \{(x; 2x - 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Définition 5. Un système linéaire est **homogène** si tous les coefficients apparaissant dans son second membre sont nuls. Le système homogène associé à un système d'équation linéaires est le système obtenu en remplaçant chaque second membre par 0.

Théorème 1. Un système linéaire est de Cramer si et seulement si son système homogène associé est de Cramer.

Remarque 2. Autrement dit, le fait qu'un système ait une solution unique ou non ne dépend que des coefficients de chaque équation, mais pas de son second membre. Ainsi, si l'on reprend le dernier exemple étudié, un système de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & a \\ -4x & + & 2y & = & b \end{array}\right.$$

aura une infinité de solutions si $b = -2a$, et aucune si $b \neq -2a$, mais ne sera jamais de Cramer.

Démonstration. On attendra de revoir les systèmes linéaires sous l'angle matriciel pour prouver ce résultat. $\square$

Définition 6. Un système linéaire est **carré** s'il possède autant d'équations que d'inconnues, c'est-à-dire si $p = n$.

Définition 7. Un système linéaire est **triangulaire** si $\forall j < i$, $a_{ij} = 0$ (en reprenant les notations de la définition des systèmes linéaires).

Remarque 3. Autrement dit, le premier coefficient de la deuxième ligne, les deux premiers de la troisième ligne, et ainsi de suite, sont nuls. Le système ressemble donc à ceci :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & \ddots & & & & & & \vdots \\ & & & & a_{pp}x_p & \dots & + & a_{pn}x_n & = & b_p \end{array}\right.$$

Remarque 4. La forme du système triangulaire dépend en fait des valeurs de p et n, mais dans tous les cas, un système triangulaire est un système facile à résoudre. Examinons un exemple dans le cas où $p = n$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & -5 \\ & & 5y & + & z & = & 8 \\ & & & & -2z & = & 4 \end{array}\right.$$

Il suffit de remonter le système pour obtenir les valeurs des inconnues l'une après l'autre : $z = -2$, donc $5y = 8 - z = 10$, d'où $y = 2$, puis $2x = -5 + y - 3z = -6$, donc $x = -3$. On obtient une solution unique $\mathcal{S} = \{(-3; 5; -2)\}$. Notons que dans le cas d'un système triangulaire carré, on aura la plupart du temps un système de Cramer.

Si $p > n$, c'est encore plus simple puisque les dernières équations ont un membre de gauche nul. Soit le membre de droite y est également nul et on peut les oublier, soit ce n'est pas le cas et le système est incompatible, par exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & 3z & = & -5 \\ & & 5y & + & z & = & 8 \\ & & & & -2z & = & 4 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right.$$

Enfin, dans le cas où $p < n$, le système triangulaire aura nécessairement une infinité de solutions, qu'on va pourvoir exprimer en fonction des dernières inconnues en remontant le système comme dans les autres cas :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -2 \\ & & y & + & 2z & = & 4 \end{array}\right.$$

À l'aide de la deuxième équation, on obtient $y = 4 - 2z$, puis $x = -2 + 2y - z = 6 - 5z$, soit $\mathcal{S} = \{(6 - 5z; 4 - 2z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

2 Méthode de résolution

Définition 8. Deux systèmes linéaires sont **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.

Définition 9. Les **opérations élémentaires** sur les lignes d'un système linéaire sont de trois types :
- échange des lignes i et j, noté $L_i \leftrightarrow L_j$
- multiplication d'une ligne par un réel non nul, noté $L_i \leftarrow aL_i$ $(a \neq 0)$
- combinaison des lignes i et j, noté $L_i \leftarrow L_i + bL_j$ $(b \in \mathbb{R})$

Remarque 5. On combine souvent les deux derniers types d'opérations élémentaires pour faire des opérations du type $L_i \leftarrow aL_i + bL_j$, avec $a \neq 0$. On peut également ajouter à ces opérations les permutations de colonnes, qui peuvent simplifier la résolution d'un système.

Proposition 1. Les opérations élémentaires sur les lignes transforment un système linéaire en un système équivalent.

Théorème 2. Algorithme du pivot de Gauss

On peut transformer un système linéaire linéaire quelconque en système triangulaire en procédant de la façon suivante :
- Si besoin est, on échange la ligne L_1 avec une ligne L_i sur laquelle le coefficient a_{i1} est non nul.
- À l'aide de combinaisons du type $L_i \leftarrow aL_i + bL_1$, on annule tous les coefficients a_{i1}, pour $i \geqslant 2$ (on peut le faire car a_{11} est désormais non nul).
- On reprend l'algorithme sur le sous-système formé des $p-1$ dernières lignes (et ne contenant donc plus que $n-1$ inconnues).

Exemple : nous allons résoudre un système à 4 équations et 4 inconnues en suivant scrupuleusement l'algorithme décrit :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\ 2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 \\ -x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} \\ L_2 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_1 - 3L_3 \\ L_4 \leftarrow L_1 + 3L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\ & & 11y & & & + & t & = & 26 \\ & & y & + & 12z & - & 7t & = & -26 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} \\ \\ L_3 \leftarrow 11L_2 - 7L_3 \\ L_4 \leftarrow L_2 - 7L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\ & & & & -66z & + & 48t & = & 192 \\ & & & & -90z & + & 54t & = & 216 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow 90L_3 - 66L_4 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 \\ & & 7y & - & 6z & + & 5t & = & 34 \\ & & & & -66z & + & 48t & = & 192 \\ & & & & & & 756t & = & 3024 \end{array}\right.$$

En remontant le système, on obtient $t = 4$, puis $-66z = 192 - 48t = 0$, donc $z = 0$; $7y = 34 + 6z - 5t = 14$, donc $y = 2$, et enfin $3x = 7 - y + 3z - 2t = -3$, donc $x = -1$. Le système a donc une unique solution : $\mathcal{S} = \{(-1; 2; 0; 4)\}$.

On ne peut qu'être un peu frustré d'avoir fait des calculs si compliqués pour une solution aussi simple. On peut en fait les réduire grandement en utilisant le pivot de façon plus subtile, c'est-à-dire en choisissant un bon pivot à chaque étape. Par exemple :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl}
3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 & \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \\
x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 & \\
2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 & \\
-x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 &
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl}
x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 & \\
3x & + & y & - & 3z & + & 2t & = & 7 & \quad L_2 \leftarrow 3L_1 - L_2 \\
2x & - & 3y & - & 2z & + & t & = & -4 & \quad L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\
-x & & & + & 5z & - & 3t & = & -11 & \quad L_4 \leftarrow L_1 + L_4
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl}
x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 & \\
 & & -7y & + & 6z & - & 5t & = & -34 & \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \\
 & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 & \\
 & & -2y & + & 6z & - & 4t & = & -20 &
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl}
x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 & \\
 & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 & \\
 & & -7y & + & 6z & - & 5t & = & -34 & \quad L_3 \leftarrow 7L_2 - L_3 \\
 & & -2y & + & 6z & - & 4t & = & -20 & \quad L_4 \leftarrow 2L_2 - L_4
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl}
x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 & \\
 & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 & \\
 & & & & 22z & - & 16t & = & -64 & \\
 & & & & 2z & - & 2t & = & -8 & \quad L_4 \leftarrow L_3 - 11L_4
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr}
x & - & 2y & + & z & - & t & = & -9 \\
 & & -y & + & 4z & - & 3t & = & -14 \\
 & & & & 22z & - & 16t & = & -64 \\
 & & & & & & 6t & = & 24
\end{array}\right.$$

On retrouve bien évidemment la même solution que tout à l'heure.

Exemple : pour conclure ce court chapitre, un exemple de résolution de système faisant intervenir un paramètre $m \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{ccccc}
(4-m)x & + & 3y & = & 0 \\
2x & + & (1+m)y & = & 0
\end{array}\right.$$

Pour le résoudre, on effectue la combinaison $L_1 \leftarrow -2L_1 + (4-m)L_2$ et on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ccccc}
 & & ((1+m)(4-m)-6)y = 0 & = & 0 \\
2x & + & (1+m)y & = & 0
\end{array}\right.$$

Dans le cas général, c'est-à-dire si $(1+m)(4-m)-6 \neq 0$, le système a une solution unique qui est le couple $(0;0)$. Les valeurs de m posant problème sont celle pour lesquelles $4+4m-m-m^2-6 = 0 \Leftrightarrow m^2-3m+2=0$, soit $(m-1)(m-2)=0$. En effet, si $m=1$, le système se réduit à :

$$\left\{\begin{array}{ccccc}
3x & + & 3y & = & 0 \\
2x & + & 3y & = & 0
\end{array}\right.$$

et on a $\mathcal{S} = \{(x;-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$; et si $m=2$, on a :

$$\left\{\begin{array}{ccccc}
2x & + & 3y & = & 0 \\
2x & + & 3y & = & 0
\end{array}\right.$$

donc $\mathcal{S} = \{(x;-\frac{2}{3}x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.