Suites II : convergence, comparaison

ECE3 Lycée Carnot

25 octobre 2009

Après un premier chapitre sur les suites assez général où rien d'extrêmement complexe n'avait été abordé, nous entrons dans le vif du sujet avec le principal sujet d'étude à notre programme cette année : la convergence. Ce chapitre est doublement important puisque toutes les très importantes notions vues ici seront reprises (et adaptées, bien entendu) dans le cadre des fonctions d'ici quelques mois. La notion de limite n'est sûrement pas une totale découverte pour vous, mais nous allons l'aborder cette année dans un cadre très rigoureux qui peut déstabiliser au premier abord. Certes, les définitions sont un peu complexes, mais une fois assimilées, elles sont en fait beaucoup plus maniables que la notion très floue que vous aviez pu voir jusqu'à présent.

1 Définitions

La notion de limite est intuitivement assez simple : on se rapproche « autant qu'on le souhaite » d'une certaine valeur quand n devient « suffisamment grand ». Pour rendre cette idée mathématiquement rigoureuse, il suffit en fait d'expliciter les deux expressions entre guillemets via l'utilisation de quantificateurs.

1.1 Limites finies

Définition 1. Une suite réelle (u_n) **converge** vers une **limite** $l \in \mathbb{R}$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - l| < \varepsilon$. On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$. Toute suite convergeant vers une limite l est appelée suite **convergente**. Sinon, la suite est dite **divergente** (même si elle peut avoir une limite infinie).

Rappelons que $|u_n - l| < \varepsilon$ signifie que $u_n \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$. Autrement dit, aussi petit que soit l'intervalle que l'on prend autour du réel l (c'est-à-dire aussi proche de 0 que soit ε dans notre définition), les valeurs de la suite vont finir par être **toutes** dans cet intervalle, à condition qu'on attende suffisamment longtemps (jusqu'à n_0).

Méthode : Pour prouver qu'une suite donnée converge vers un certain réel à l'aide de cette définition (ce qu'on fera heureusement assez rarement, mais il est important de bien comprendre les mécanismes cachés derrière le formalisme), on procède ainsi :

- On fixe ε à une valeur strictement positive quelconque.
- On calcule $|u_n - l|$.
- On cherche une valeur de n_0 (qui va naturellement dépendre de ε) pour laquelle cette expression est inférieure à ε.

Exemple : Considérons la suite définie par $u_n = \dfrac{n+3}{n+2}$, et prouvons que sa limite vaut 1. Soit $\varepsilon > 0$, alors $|u_n - 1| = \left|\dfrac{n+3}{n+2} - 1\right| = \left|\dfrac{n+3-(n+2)}{n+2}\right| = \left|\dfrac{1}{n+2}\right| = \dfrac{1}{n+2}$. L'expression étant positive, il suffit de déterminer pour quelles valeurs de n on a $\frac{1}{n+2} < \varepsilon$, ce qui nous donne $n > \frac{1}{\varepsilon} - 2$. On peut donc choisir $n_0 = Ent\left(\frac{1}{\varepsilon} - 2\right)$ (remarquez que, plus ε est proche de 0, plus n_0 devient grand, ce qui est logique).

Remarque 1. Le fait qu'une suite soit ou non convergente ne dépend absolument pas de ce qui se passe « au début » de la suite. Autrement dit, on peut très bien modifier par exemple le milliard de premiers termes d'une suite, ça ne change rien à sa limite éventuelle (on devra juste chercher nos n_0 un peu plus loin). Dans le même ordre d'idée, décaler les indices de la suite ou même en sauter une partie ne va pas changer grand chose : ainsi, si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$, on aura $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = l$ et $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = l$ (attention tout de même, pour cette dernière propriété, la réciproque n'est pas vraie).

Proposition 1. Soit (u_n) une suite convergente, alors sa limite l est unique.

Démonstration. Nous allons pour la première fois cette année recourir à un raisonnement par l'absurde pour démontrer cette proposition. Supposons donc que le résultat énoncé est faux, c'est-à-dire qu'une même suite (u_n) admet deux limites distinctes l et l' (notons par exemple l' la plus grande des deux), et tentons de montrer que ceci entraine une absurdité. Appliquons donc la définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{l'-l}{3}$: on peut donc trouver d'une part un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$; d'autre part un entier n'_0 tel que $\forall n \geqslant n'_0$, $u_n \in]l'-\varepsilon; l'+\varepsilon[$. mais alors, dès que $n \geqslant \max(n_0, n'_0)$, on a $u_n \in]l-\varepsilon; l+\varepsilon[\cap]l'-\varepsilon; l'+\varepsilon[$, ce qui est très gênant puisque cette intersection est vide d'après la définition de ε. Conclusion, l'hypothèse effectuée était absurde, et une suite ne peut pas avoir deux limites différentes. □

Proposition 2. Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Appliquons la définition de la limite avec par exemple $\varepsilon = 1$. On obtient un entier n_0 tel que, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in]l-1; l+1[$. Par ailleurs, les termes de la suite d'indice inférieur à n_0 sont en nombre fini, il en existe donc un qui est le plus grand (notons sa valeur M) et un qui est le plus petit (on va le noter m). Il est alors facile de constater que la suite est minorée par $\min(m, l-1)$ et majorée par $\max(M, l+1)$. □

Théorème 1. Théorème de convergence monotone :
Toute suite décroissante et minorée converge. Toute suite croissante et majorée converge.

Démonstration. Ce résultat, bien que relativement intuitif, est plus difficile à démontrer qu'il n'en a l'air, au point d'ailleurs que nous allons l'admettre (une des difficultés étant de caractériser la limite comme étant le plus petit majorant de la suite, et de montrer qu'une telle chose existe). □

Remarque 2. Attention ! Une suite croissante et majorée par un réel M ne converge pas nécessairement **vers M**. La suite a tout un paquet de majorants, dont un seul est sa limite.

Exemple : La suite définie par $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$ est croissante (car, $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^{n+1} \leqslant x^n$, donc $\frac{1}{1+x^n} \leqslant \frac{1}{1+x^{n+1}}$), et majorée par 1 (car $\forall x \in [0;1]$, $\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$, donc $\int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \leqslant \int_0^1 1 dx = 1$), donc convergente. Mais ces arguments ne prouvent en aucun cas que sa limite est 1. Le calcul de la limite est d'ailleurs loin d'être simple (nous reverrons des exemples de ce genre dans le chapitre sur l'intégration).

1.2 Limites infinies

Bien qu'étant divergentes, certaines suites ont un comportement plus intéressant que d'autres quand n tend vers $+\infty$. Ce sont celles qui deviennent « très grandes » ou « très négatives ». Encore une fois, un peu de formalisation sera nécessaire pour obtenir une définition maniable, mais c'est plutôt plus facile que dans le cas des limites finies.

Définition 2. Une suite réelle (u_n) **diverge vers** $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n > A$. On le note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. De même, une suite réelle (u_n) **diverge vers** $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{R}$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n < A$. On le note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple : Considérons la suite définie par $u_n = n^2$ et montrons à l'aide de cette définition que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Comme pour le cas d'une limite finie, on commence pour cela par fixer la valeur de A. Constatons ensuite que $u_n > A \Leftrightarrow n > \sqrt{A}$ (si $A \geqslant 0$; mais si $A < 0$, il n'y a pas vraiment de souci puisque dans ce cas u_n est toujours supérieur à A). On peut donc choisir $n_0 = Ent(\sqrt{A}) + 1$, et on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Proposition 3. Une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$. Une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Démonstration. Soit (u_n) une suite croissante et non majorée. Cette dernière hypothèse signifie que $\forall A \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n_0} > A$. Mais la suite étant croissante, on a en fait $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} > A$, ce qui prouve exactement la divergence vers $+\infty$. Inutile de refaire quoi que ce soit pour le deuxième cas : si (v_n) est décroissante non minorée, alors $(-v_n)$ est croissante non majorée, et on se ramène au cas précédent. □

2 Propriétés principales

2.1 Limites de suites usuelles

Proposition 4. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Si $r > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Si $r < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$. Si $r = 0$, la suite (u_n) est constante égale à u_0 et converge donc vers u_0.

Démonstration. Supposons $r > 0$ et considérons $A \in \mathbb{R}$, alors $u_n > A \Leftrightarrow u_0 + nr > A \Leftrightarrow n > \dfrac{A - u_0}{r}$. On peut donc prendre $n_0 = Ent\left(\dfrac{A - u_0}{r}\right)$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. Si $r < 0$, le calcul est le même, si ce n'est que le signe de l'inégalité change quand on divise par r, d'où le fait que $u_n < A \Leftrightarrow n > \dfrac{u_0 - A}{r}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$. □

Proposition 5. Limites des suites géométriques.
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$.

- si $q > 1$, la suite diverge vers $+\infty$ si $u_0 > 0$, vers $-\infty$ si $u_0 < 0$.
- si $q = 1$, la suite (u_n) est constante et converge vers u_0.
- si $-1 < q < 1$, la suite (u_n) converge vers 0.
- si $q \leqslant -1$, la suite (u_n) est divergente.

Démonstration.

- Si $q > 1$, on peut noter $q = 1 + \alpha$, avec $\alpha > 0$. Prouvons alors par récurrence la propriété P_n : $q^n \geqslant 1 + n\alpha$. Pour $n = 0$, les deux membres sont égaux à 1, donc P_0 est vraie. Supposons désormais P_n vraie, alors $q^{n+1} = (1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)^n(1+\alpha) \geqslant (1+n\alpha)(1+\alpha) = 1 + (n+1)\alpha + n\alpha^2 \geqslant 1 + (n+1)\alpha$. La propriété P_{n+1} est donc vérifiée, et d'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n.
  On peut désormais prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$. Supposons $u_0 > 0$ (l'autre cas est exactement symétrique) et posons $A > 0$, alors pour avoir $u_n \geqslant A$, il suffit d'avoir $u_0 \times (1 + n\alpha) \geqslant A$, soit $n \geqslant \dfrac{\frac{A}{u_0} - 1}{\alpha}$, ce qui permet de conclure.
- Sautons allègrement le cas $q = 1$ qui ne pose aucun problème, et considérons maintenant le cas où $|q| < 1$. Dans ce cas, on constate que $\dfrac{1}{|q|} > 1$. Posons $\varepsilon > 0$ et notons $A = \dfrac{|u_0|}{\varepsilon}$, d'après la démonstration précédente, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $\dfrac{1}{|q|^n} > A$. Mais cela revient au même que $|q|^n < \dfrac{\varepsilon}{|u_0|}$, soit $|u_n| < \varepsilon$, ce qui prouve exactement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $q = -1$, la suite oscille entre deux valeurs distinctes et n'a pas de limite. Si $q < -1$, $|u_n|$ diverge vers $+\infty$ (puisque c'est une suite géométrique de premier terme positif et de raison plus grande que 1), donc (u_n) n'est pas bornée et ne peut converger. Il est également facile de prouver qu'elle ne peut avoir une limite infinie puisque ses termes sont de signe alterné.

□

2.2 Opérations et limites

Comme on ne se contentera pas de travailler avec des suites aussi simples que les suites arithmétiques et géométriques, mais que celles-ci constituent tout de même les éléments de base de la construction d'un certain nombre de suites (à commencer par les suites arithmético-géométriques ou récurrentes linéaires), il est nécessaire de savoir calculer des limites de sommes ou de produits de suite. C'est assez intuitif, mais il faut surtout se souvenir des cas où on ne peut pas conclure, les fameuses **formes indéterminées**.

Proposition 6. Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant une limite (finie ou infinie), alors la limite de leur somme $(u_n + v_n)$ est donnée par le tableau suivant (f.i. signifiant forme indéterminée) :

$(u_n)\backslash(v_n)$	l'	$+\infty$	$-\infty$
l	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$f.i.$
$-\infty$	$-\infty$	$f.i.$	$-\infty$

Démonstration. Prouvons par exemple le cas où les deux suites ont une limite finie, notées respectivement l et l'. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in \left]l - \dfrac{\varepsilon}{2}; l + \dfrac{\varepsilon}{2}\right[$ (oui, la division par 2 est volontaire, après tout $\dfrac{\varepsilon}{2}$ est un réel strictement positif auquel on peut appliquer la définition de la limite) ; et un entier n_0' tel que $\forall n \geqslant n_0'$, $v_n \in \left]l' - \dfrac{\varepsilon}{2}; l' + \dfrac{\varepsilon}{2}\right[$. En notant $N = \max(n_0, n_0')$, on obtient alors en ajoutant les deux encadrements $\forall n \geqslant N$, $u_n + v_n \in]l + l' - \varepsilon, l + l' + \varepsilon[$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = l + l'$. Les autres cas se démontrent de façon similaire et ne présentent pas de grosse difficulté. □

Exemples : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 47 = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2} + 2 = 2$.

Proposition 7. Soit (u_n) une suite réelle et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors, si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda u_n = \lambda l$. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda u_n = \pm\infty$ (le signe dépendant du signe de la limite de (u_n) et de celui de λ suivant la règle des signes).

Démonstration. Prouvons le cas où la limite est finie. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{|\lambda|}$ (c'est la même astuce que pour la démonstration de la limite d'une somme), donc pour $n \geqslant n_0$, $|\lambda u_n - \lambda l| < \varepsilon$, ce qui prouve bien que $\lim\limits_{n \to +\infty} \lambda u_n = \lambda l$. Le cas des limites infinies est très similaire. $\square$

Exemples : $\lim\limits_{n \to +\infty} -3n = -\infty$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3}{n} + 2n - 1 = +\infty$.

Proposition 8. Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant une limite (finie ou infinie), alors la limite de leur produit $(u_n v_n)$ est donnée par le tableau suivant :

$(u_n)\backslash(v_n)$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l > 0$	$l.l'$	$l.l'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$l.l'$	$l.l'$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	$f.i.$	$f.i.$
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$f.i.$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$f.i.$	$-\infty$	$+\infty$

Démonstration. Commençons par prouver le cas où les deux suites ont pour limite 0, et considérons $\varepsilon > 0$. Il existe deux réels n_0 et n'_0 tels que, respectivement, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n| < \sqrt{\varepsilon}$; et $\forall n \geqslant n'_0$, $|v_n| < \sqrt{\varepsilon}$. On en déduit que $\forall n \geqslant \max(n_0, n'_0)$, $|u_n v_n| < \varepsilon$, ce qui prouve que $(u_n v_n)$ tend vers 0.

Supposons désormais que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l' \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - l) = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - l') = 0$, donc en utlisant ce qu'on vient juste de démontrer $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - l)(v_n - l') = 0$. Or, $(u_n - l)(v_n - l') = u_n v_n - l v_n - l' u_n + l l'$, ou encore $u_n v_n = (u_n - l)(v_n - l') + l v_n + l' u_n - l l'$. D'après les propositions démontrées auparavant (limite d'une somme et d'un produit par un réel), on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n = 0 + l l' + l' l - l l' = l l'$.

Un dernier cas pour la route, celui où les deux suites tendent vers $+\infty$. Considérons alors $A > 1$ (c'est suffisant : si on arrive à trouver un n_0 à partir duquel $u_n > A > 1$, certainement ce même n_0 conviendra pour toutes les valeurs de A inférieures ou égales à 1). Il existe deux réels n_0 et n'_0 à partir desquels $u_n > A$ et $v_n > A$ respectivement. Pour $n \geqslant \max(n_0, n'_0)$, on a alors $u_n v_n > A^2 > A$, d'où la divergence de $(u_n v_n)$ vers $+\infty$. $\square$

Remarque 3. Dans les cas où on tombe sur une forme indéterminée avec une somme de suites, il est souvent efficace de transformer la somme en produit en factorisant par un terme « le plus gros possible ». Notamment, dans le cas d'un polynôme, on factorise par le terme de plus haut degré : $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - 3n + 2 = \lim\limits_{n \to +\infty} n^2 \left(1 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{2}{n^2}\right) = +\infty$.

Définition 3. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^+$ lorsque la suite (u_n) tend vers 0 en étant positive à partir d'un certain rang. De même, on notera $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0^-$ si (u_n) est négative à partir d'un certain rang.

Proposition 9. Soit (u_n) une suite réelle qui ne s'annule plus à partir d'un certain rang, et ayant une limite, alors la limite de $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est donnée par le tableau suivant :

(u_n)	$l \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$	$\dfrac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-

Démonstration. Prouvons par exemple le cas où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$. Soit $A > 0$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n| < \dfrac{1}{A}$. Quitte à changer la valeur de n_0 pour atteindre le rang à partir duquel (u_n) est positive et ne s'annule plus, on a même $0 < u_n < \dfrac{1}{A}$, d'où $\dfrac{1}{u_n} > A$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = +\infty$. □

Remarque 4. Pas besoin de donner des règles pour le quotient de deux suites, puisqu'un quotient n'est rien d'autre que le produit par un inverse. Dans les cas où on tombe sur un quotient coriace, la méthode la plus efficace reste la plupart du temps de factoriser numérateur et dénominateur par leur terme « le plus fort ». Nous verrons un peu plus loin dans le cours une façon plus élégante de rédiger ce genre de calcul à l'aide de la notion d'équivalent.

Exemple : $u_n = \dfrac{\ln n + n^2 + 2}{e^n + \sqrt{n}} = \dfrac{n^2}{e^n} \times \dfrac{1 + \frac{2}{n^2} + \frac{\ln n}{n^2}}{1 + \frac{\sqrt{n}}{e^n}}$. En utilisant nos connaissances sur les croissances comparées, il est facile de constater que le premier quotient tend vers 0 et le deuxième vers 1, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2.3 Théorèmes de comparaison

Proposition 10. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant repectivement vers l et l' et telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Alors $l \leqslant l'$.

Démonstration. Petit raisonnement par l'absurde : supposons $l > l'$ et posons $\varepsilon = \dfrac{l - l'}{3}$, alors à partir d'un certain rang on aura $u_n \in \left]l - \dfrac{\varepsilon}{3}, l + \dfrac{\varepsilon}{3}\right[$ et $v_n \in \left]l' - \dfrac{\varepsilon}{3}, l' + \dfrac{\varepsilon}{3}\right[$. Mais comme $l' + \dfrac{\varepsilon}{3} < l - \dfrac{\varepsilon}{3}$ (par construction de ε), ceci est incompatible avec le fait que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. L'hypothèse est donc absurde et $l \leqslant l'$. □

Remarque 5. Cette proposition est souvent utilisée sous la forme plus simple où l'une des deux suites est constante. Ainsi, si (u_n) converge et que $u_n \leqslant A$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant A$. Notamment, la limite d'une suite de signe constant est de même signe que la suite.

Remarque 6. L'inégalité sur la limite est toujours large, même si on a une inégalité stricte entre u_n et v_n. Par exemple, $\forall n \geqslant 1$, $1 + \dfrac{1}{n} > 1 + \dfrac{1}{n^2}$, mais ces deux suites ont la même limite.

Théorème 2. Théorème des gendarmes (ou théorème d'encadrement si vous voulez faire plus sérieux).
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ (ces limites ont le droit d'être infinies).

Démonstration. Occupons-nous du cas où la limite commune de (u_n) et (w_n) est un réel l, et choisissons $\varepsilon > 0$. Alors à partir d'un certain rang, on aura $|u_n - l| < \varepsilon$ et $|v_n - l| < \varepsilon$. Autrement dit, u_n et v_n appartiennent tous deux à l'intervalle $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$. Mais alors v_n, qui se situe entre les deux, appartient lui aussi à cet intervalle, et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$. Le cas des limites infinies est tout aussi simple (une seule des deux suites encadrantes suffit même). □

Exemple : Considérons la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k^2}$. Très pénible à étudier avec sa somme à nombre de termes variable, mais si on ne veut que la limite, c'est beaucoup plus facile. Chacun des termes de la somme est compris entre le plus petit, en l'occurence $\dfrac{1}{(2n)^2}$, et le plus grand, à savoir $\dfrac{1}{n^2}$, donc $\dfrac{n+1}{(2n)^2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n+1}{n^2}$ (il y a $n+1$ dans la somme définissant u_n). Chacune des deux suites encadrant u_n ayant pour limite 0, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2.4 Suites adjacentes

Définition 4. Deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si elles vérifient les deux propriétés suivantes :

- l'une est croissante et l'autre décroissante.
- $\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$.

Théorème 3. Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Démonstration. Supposons par exemple (u_n) croissante et (v_n) décroissance, et commençons par constater que la suite $(u_n - v_n)$ est croissante et a pour limite 0. Cela implique que cette suite est à termes négatifs : en effet, si on avait, pour un rang n_0, $u_{n_0} - v_{n_0} = \alpha > 0$, $(u_n - v_n)$ serait supérieure à $\alpha > 0$ à partir d'un certain rang, donc ne pourrait pas converger vers 0. Conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.

Mais alors, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. Autrement dit, (u_n) est croissante et majorée donc convergente. De même, (v_n) est décroissante et minorée par u_0, donc converge également. Si on note l et l' leurs limites respectives, on a $\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = l - l' = 0$, donc $l = l'$, ce qui achève la démonstration. □

Exemple : Considérons les suites définies par $u_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ (rappelons au passage que $0! = 1$). Comme $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$, la suite (u_n) est croissante. Par ailleurs, $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!}$, qui est négatif si $n \geqslant 1$. La suite (v_n) est donc décroissante à partir du rang 1. Reste à vérifier que $\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$, ce qui n'a rien de difficile puisque $u_n - v_n = -\frac{1}{n!}$. Les deux suites sont donc adjacentes.

3 Équivalents et négligeabilité

Dans cette dernière section, nous allons introduire de nouveaux concepts qui nous permettront de retranscrire de façon plus élégante certains résultats déjà vus, et surtout de se simplifier énormément les calculs de limite. Il s'agit de donner une définition précise à la notion d'odre de grandeur. Les résultats de croissance comparée stipulent par exemple que la fonction ln n'est pas du même ordre de grandeur que la fonction carré quand x tend vers $+\infty$, même si ces deux fonctions ont pour limite $+\infty$. Par contre, il paraitrait raisonnable, par exemple, de dire que x^2 et $x^2 + 2$ sont du même ordre de grandeur en $+\infty$ (l'écart entre les deux devenant négligeable).

3.1 Définitions

Définition 5. Deux suites (u_n) et (v_n) sont **équivalentes** si on peut écrire $u_n = a_n v_n$, où (a_n) est une suite vérifiant $\lim_{n \to +\infty} a_n = 1$. Plus simplement, si les deux suites ne s'annulent plus à partir d'un certain rang, cela revient à dire que $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$. On le note $u_n \sim v_n$.

Remarque 7. Le fait que la limite du quotient soit égale à 1 transcrit bien la notion de même ordre de grandeur. Une suite équivalente à une constante $l \neq 0$ est tout simplement une suite convergeant vers l.

Exemple : $n^2 + 2n + 3 \sim n^2$; $n + \ln n \sim n$ puisque $\frac{n + \ln n}{n} = 1 + \frac{\ln n}{n}$ a pour limite 1.

Remarque 8. Une suite polynômiale est toujours équivalente à son terme de plus haut degré.

Proposition 11. Deux suites équivalentes ont la même limite (quand elles ont une limite).

Démonstration. Dans le cas où (v_n) a une limite finie l, il suffit de constater que $u_n = v_n \times \frac{u_n}{v_n}$ et utiliser les règles de calcul de la limite d'un produit (le cas où l'une des suites est nulle à partir d'un certain rang n'est pas vraiment gênant puisqu'alors l'autre l'est aussi, et les deux suites convergent manifestement vers 0). Si (v_n) a pour limite $+\infty$, on peut en utilisant la définition de l'équivalence avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$ trouver un entier n_0 à partir duquel $\frac{1}{2} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{3}{2}$, autrement dit $\frac{v_n}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{3v_n}{2}$. Le théorème des gendarmes permet alors de conclure. $\square$

Définition 6. Une suite (u_n) est négligeable devant une suite (v_n) si on peut écrire $u_n = \varepsilon_n v_n$, où (ε_n) est une suite vérifiant $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. Plus simplement, si les deux suites ne s'annulent plus à partir d'un certain rang, cela revient à dire que $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$. On le note $u_n = o(v_n)$ (et on le lit « (u_n) est un petit o de (v_n) »).

Remarque 9. Dire que deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes revient à dire que $u_n - v_n = o(u_n)$ (réfléchissez-y, c'est logique). De même, $u_n = o(v_n)$ est équivalent à dire que $u_n + v_n \sim v_n$.

Proposition 12. Croissance comparée des fonctions usuelles.
- Si $\alpha < \beta$, $n^\alpha = o(n^\beta)$
- $\forall a > 1$, $\forall b > 0$, $n^b = o(a^n)$
- $\forall b > 0$, $\forall c > 0$, $(\ln n)^c = o(n^b)$

Remarque 10. Ces résultats, combinés à la remarque précédente, permettent d'obtenir très rapidement des équivalents (et donc la limite) de sommes de suites usuelles, par exemple $2^n - 12n^2 - 3\ln n \sim 2^n$, donc $\lim_{n\to+\infty}(2^n - 12n^2 - 3\ln n) = +\infty$. En gros, déterminer un équivalent consiste à ne garder que le terme prépondérant et à supprimer tous les termes négligeables devant lui.

Proposition 13. Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que $(u_n) = o(v_n)$. Si (v_n) est convergente alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Si $|u_n|$ diverge vers $+\infty$, alors $|v_n|$ aussi.

Démonstration. La première propriété est une nouvelle fois une simple conséquence des formules de limite d'un produit. Quant à la deuxième, la démonstration ressemble à celle déjà vue dans le cas de l'équivalence. Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, on aura certainement $|v_n| > |u_n|$ à partir d'un certain rang (il suffit de prendre $\varepsilon = 1$ dans la définition), donc si $|u_n|$ diverge vers $+\infty$, $|v_n|$ aussi. Sans les valeurs absolues, on a des problèmes de signe, on ne peut donc pas conclure grand chose d'intéressant. $\square$

3.2 Propriétés

Proposition 14. Principales propriétés de l'équivalence.
- (symétrie) Si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$.
- (transitivité) Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.
- (stabilité par produit) Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, alors $u_n w_n \sim v_n t_n$.
- (stabilité par inverse) Si $u_n \sim v_n$ et v_n ne s'annule plus à partir d'un certain rang, alors $\frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{v_n}$.
- (stabilité par passage à la valeur absolue) Si $u_n \sim v_n$, alors $|u_n| \sim |v_n|$.

Démonstration. Si les suites ne s'annulent plus à partir d'un certain rang, les propriétés découlent très facilement de la définition de l'équivalence. Par exemple, pour la deuxième, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{w_n} = 1$ donc par produit $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{w_n} = 1$. Dans le cas où une suite est nulle à partir d'un certain rang, c'est aussi le cas de toutes les suites qui lui sont équivalentes, donc on ne travaille qu'avec des suites nulles à partir d'un certain rang, et les résultats sont évidents. $\square$

Exemple : Ces résultats, notamment la stabilité par produit et inverse, sont essentiels, car ils vont nous permettre de calculer notamment des limites de quotient en passant par les équivalents, nous évitant les fastideuses factorisations. Un exemple : $\dfrac{3n^3 - 5n^2 + 3n - 1}{n^3 + 5\ln n} \sim \dfrac{3n^3}{n^3} = 3$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n^3 - 5n^2 + 3n - 1}{n^3 + 5\ln n} = 3$. Une grande majorité des formes indéterminées que nous rencontrerons pourront se résoudre de cette façon.

Remarque 11. **ATTENTION**, on ne peut pas additionner des équivalents, c'est même une source d'horreurs mathématiques hélas très utilisée. Par exemple $n^2 + n \sim n^2$, et $-n^2 - 3 \sim -n^2$, mais la somme nous donnerait $n - 3$ équivalent à 0, ce qui est risible. Plus subtil, les équivalents ne se composent pas non plus en général. Ainsi, on peut avoir $u_n \sim v_n$ mais $e^{u_n} \nsim e^{v_n}$.

Proposition 15. Principales propriétés de la relation de négligeabilité.

- (transitivité) Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
- (stabilité par produit) Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$.
- (stabilité par produit, bis) Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(t_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n t_n)$.
- (passage au quotient) Si $u_n = o(v_n)$ et que les suites ne s'annulent plus à partir d'un certain rang, alors $\dfrac{1}{v_n} = o\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.

Démonstration. Comme pour les propriétés de l'équivalence, tout cela est extrêmement facile à démontrer à l'aide des propriétés sur les limites. Laissé en exercice au lecteur ! □