Problème de révision pour le DS6 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

9 mars 2010

Puissances d'une matrice

1. On obtient sans grande difficulté $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{8} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{16} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$. Si on veut trouver une relation du type $A^3 = aA^2 + bA$, les coefficients dans les coins donnent immédiatement $a = \frac{1}{2}$, puis on constate que $A^3 - \frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2}A$, soit $A^3 = \frac{1}{2}(A^2 + A)$.
2. On va bien sûr procéder par récurrence : c'est vrai pour $n = 1$ car $A = 0 \times A^2 + 1 \times A$; supposons la relation vérifiée au rang n, on a alors $A^{n+1} = A \times A^n = A(u_nA^2 + v_nA) = u_nA^3 + v_nA^2 = \frac{u_n}{2}A^2 + \frac{u_n}{2}A + v_nA^2$. La relation est donc également vraie au rang $n+1$ en posant $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + v_n$ et $v_{n+1} = \frac{u_n}{2}$.
3. Constatons en effet que $u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{u_n}{2} + v_n + \frac{u_n}{2} = u_n + v_n$, ce qui est assea caractéristique des suites constantes. Comme $u_1 + v_1 = 0 + 1 = 1$, on aura, $\forall n \geq 1$, $u_n + v_n = 1$.
4. Comme $u_n = 1 - v_n$, la relation de récurrence pour (v_n) devient $v_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}v_n$, ce qui est bien une suite arithmético-géométrique, d'équation de point fixe $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$, ce qui donne $x = \frac{1}{3}$. Posons $w_n = v_n - \frac{1}{3}$, on a alors $w_{n+1} = v_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}v_n - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}v_n = -\frac{1}{2}\left(v_n - \frac{1}{3}\right)$, donc (w_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_1 = v_1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. On a donc $w_n = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, puis $v_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. On a ensuite $u_n = 1 - v_n = 2\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
5. On sait que $A^n = u_nA^2 + v_nA$, il n'est guère intéressant d'expliciter tous les coefficients.

Une application probabiliste

1. On a par hypothèse $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On sait alors, d'après l'énoncé, que l'élève courra une demi-heure le jour 1, donc $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Enfin, les trois probabilités pour le jour 2 découlent également de l'énoncé : $X_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

2. Comme A_n, B_n et C_n forment un système complet d'évènements, on peut appliquer la formule des probabilités totales pour obenir $P(A_{n+1})P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1})$, soit $a_{n+1} = a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{4} + c_n \times 0 = \frac{1}{4}b_n$. De même, on obtient $b_{n+1} = a_n + \frac{1}{4}b_n + c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$. Remises sous forme matricielle, ces trois relations donnent $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \times X_0 = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $X_{n+1} = AX_n$.
3. Une petite récurrence : c'est vrai pour $n = 1$ (d'après la question précédente, $X_1 = AX_0$) ou même pour $n = 0$, et si on suppose l'égalité vérifiée pour n, alors d'après la question précédente, $X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1}X_0$, ce qui achève la récurrence.
4. Connaissant X_0 et le fait que $A^n = u_nA^2 + v_nA$, on obtient $a_n = \frac{1}{4}u_n$; $b_n = \frac{1}{2}u_n + v_n$ et $c_n = \frac{1}{4}u_n$. Comme (u_n) et (v_n) ont pour limites respectives $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$ (car $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ tend vers 0), on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$. De même, $\lim_{n \to +\infty} c_n = \frac{1}{6}$ (les suites (c_n) et (a_n) sont égales à partir du rang 1). Enfin, $\lim_{n \to +\infty} b_n = \frac{1}{2} \times 23 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. On constate que la somme des trois limites vaut 1, ce qui est normal.