Problème de révision pour le DS6

ECE3 Lycée Carnot

9 mars 2010

Puissances d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3 puis trouver une relation entre A, A^2 et A^3.
2. Prouver, pour tout $n \geq 1$, l'existence d'un couple de réels (u_n, v_n) tels que $A^n = u_n A^2 + v_n A$, et déterminer des relations de récurrence vérifiées par ces deux suites.
3. Prouver que la suite $(u_n + v_n)$ est constate et calculer sa valeur.
4. En déduire que (v_n) est une suite arithmético-géométrique, puis déterminer v_n et u_n.
5. En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

Une application probabiliste

Un élève de prépa fait un footing tous les soirs pour maintenir un semblant de forme physique. Chaque jour, il choisit de courir une heure, une demi-heure ou pas du tout. On note A_n l'évènement « L'élève court 1 heure au jourd numéro b » ; B_n correspond à une demi-heure de course et C_n à l'absence de footing ; on notera aussi a_n, b_n et c_n les probabilités correspondantes. Au jour numéro 0, l'élève a couru une heure. On sait par ailleurs que s'il court une heure ou s'il ne court pas au jour n, il courra toujours une demi-heure au jourd $n + 1$. Par contre, s'il court une demi-heure au jour n, il a une chance sur 4 de passer à une heure le lendemain, une chance sur 2 de rester à une demi-heure, et donc une chance sur 4 de ne pas courrir.

1. On note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Préciser les valeurs de X_0, X_1 et X_2.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer des relations de récurrence sur les suites a_n, b_n et c_n, et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$, où A est la matrice étudiée dans la première partie du problème.
3. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
4. Déterminer les valeurs de a_n, b_n et c_n, ainsi que leurs limites quand n tend vers $+\infty$.