Problème de révision : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

5 février 2010

1. (a) La fonction f est définie (et C^∞) sur $\mathbb{R}$ car e^x+1 ne s'annule jamais, de dérivée $f'(x) = \dfrac{e^x(1+e^x)-e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$. Cette dérivée est toujours positive, f est donc strictement croissante. De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ (puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$), et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{e^x}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$. La courbe représentative admet donc deux asymptotes horizontales en $-\infty$ et en $+\infty$, d'équations respectives $y=0$ et $y=1$.

   (b) Calculons $1-f(-x) = 1-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1-\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{e^x}{e^x+1} = f(x)$. Cette égalité permet en fait de prouver que la courbe représentative de f est symétrique par rapport au point $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ (une propriété proche de l'imparité).

   (c) La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = \dfrac{e^x(1+e^x)^2-2e^x(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \dfrac{e^x(1+e^x-2e^x)}{(1+e^x)^3} = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$. Cette dérivée s'annule lorsque $e^x=1$, c'est-à-dire pour $x=0$. Le point $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ est donc le seul point d'inflexion de la courbe. La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}^-$ et concave sur $\mathbb{R}_+$.

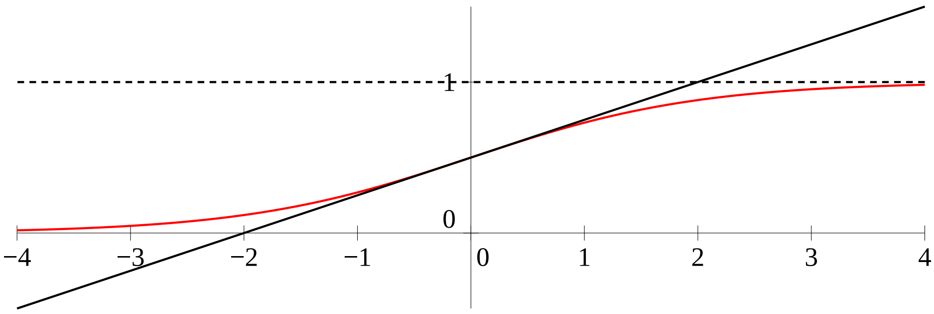
   (d) D'après la question précédente, la fonction f' est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, on a vu plus haut que f' était toujours positive, donc $\forall x\geq 0$, $0\leq f'(x)\leq f'(0)=\dfrac{1}{4}$.

2. (a) On a $f(x)=x$ si $e^x = x(e^x+1)$, soit $e^x-xe^x-x=0$, ou encore $(1-x)e^x-x=0$.

   (b) La fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}$, et $g'(x) = -e^x+(1-x)e^x-1 = -xe^x-1$; $g''(x) = -e^x-xe^x = -(1+x)e^x$. La fonction g' est donc croissante sur $]-\infty;-1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$. Comme son minimum vaut $g'(-1) = \dfrac{1}{e}-1<0$, on en déduit que g' est toujours négative. La fonction g est donc strictement décroissante donc injective sur $\mathbb{R}$, et l'équation $g(x)=0$ a au plus une solution. Comme par ailleurs $g(0)=1$ et $g(1)=-1$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, cette équation admet bien une solution (unique donc) $\alpha\in[0;1]$. D'après la question précédente, α est aussi le seul point fixe de f.

   (c) On va procédér par dichotomie (pas exacte pour ne pas avoir à manipuler des valeurs pénibles). On sait que $0\leq\alpha\leq 1$ et que g est décroissante sur $[0;1]$. De plus, $g\left(\dfrac{1}{2}\right)\simeq 0.32$, donc $\dfrac{1}{2}\leq\alpha\leq 1$. Ensuite, $g\left(\dfrac{3}{4}\right)\simeq -0.22$, donc $\dfrac{1}{2}\leq\alpha\leq\dfrac{3}{4}$. Enfin, $g(0.6)\simeq 0.13$, donc $0.6\leq\alpha\leq\dfrac{3}{4}$. On peut donc affirmer que $\alpha\simeq 0.7$ à 0.1 près.

   (d) Voici la courbe, avec sa tangente au point d'inflexion, qui a pour équation $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$:



3. (a) Comme on ne sait pas bien quel est le signe de $f(x) - x$, il est plus facile d'effectuer une récurrence : $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) = \frac{1}{2}$, donc $u_0 \leq u_1$. Supposons maintenant que $u_n \leq u_{n+1}$. On a alors d'après la croissance de la fonction f, $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n=2}$. On peut donc conclure que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$, c'est-à-dire que (u_n) est croissante.

   (b) La suite est croissante et de plus on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 1$, donc $\forall n \geq 1$, $u_n = f(u_{n-1}) \leq 1$. La suite est donc croissante et majorée, elle converge. Sa limite est un point fixe de la fonction f, qui n'en a qu'un, on peut donc conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

   (c)
```
PROGRAM valeur;
USES wincrt;
VAR u : real; i,n : integer;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de n');
ReadLn(n);
u := 0;
FOR i :=1 TO n DO u := exp(u)/(1+exp(u));
WriteLn('u',n,'=',u);
END.
```

4. (a) Inutile de faire une récurrence puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n) \geq 0$. Le premier terme v_0 étant également positif, tous les termes de la suite sont positifs.

   (b) On peut appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ puisque $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$ sur cet intervalle, donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$. Comme de plus $v_n \geq 0$ et $\alpha \geq 0$, on peut l'appliquer à ces deux valeurs, ce qui donne $|f(v_n) - f(\alpha)| \leq |v_n - \alpha|$, soit exactement $|v_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|v_n - \alpha|$. Reste à faire notre récurrence habituelle pour obtenir l'inégalité suivante. On a $|1 - \alpha| = 1 - \alpha \in [0;1]$ d'après la question 2.*b*, donc $|v_0 - \alpha \leq 1|$. Supposons désormais $|v_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}$, on a alors $|v_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|v_n - \alpha| \leq \frac{1}{4}\frac{1}{4^n} \leq \frac{1}{4^{n+1}}$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{4^n} = 0$, on peut en déduire par le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{n \to +\infty} |v_n - \alpha| = 0$, c'est-à-dire que la suite v_n converge vers α.

   (c) On sait que $|v_n - \alpha| \leq \varepsilon$ dès que $\frac{1}{4^n} \leq \varepsilon$, soit $4^n \geq \frac{1}{\varepsilon}$, donc $n \ln 4 \geq -\ln \varepsilon$, ou encore $n \geq -\frac{\ln \varepsilon}{\ln 4}$.

   (d)
```
PROGRAM hdfbvyzer;
VAR e,v : real; n : integer;
BEGIN
```

```
WriteLn('Choisissez la valeur d'epsilon');
ReadLn(e);
v :=1; n :=0;
e := -ln(e)/ln(4);
REPEAT v := exp(v)/(exp(v)+1); n :=n+1;
UNTIL n > e;
WriteLn('Une valeur approchée de la limite à ',eps,' près est ',v);
END.
```