

# Problème de révision pour le DS5

ECE3 Lycée Carnot

5 février 2010

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$ .

1. Étude de  $f$ .
  - (a) Étudier les variations de  $f$  (en particulier ses limites et branches infinies en  $\pm\infty$ ).
  - (b) Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = 1 - f(-x)$ .
  - (c) Calculer la dérivée seconde de  $f$  et déterminer ses points d'inflexion.
  - (d) Montrer que  $\forall x \in [0; +\infty[$ ,  $f'(x) \leq \frac{1}{4}$ .
2. Solutions de l'équation  $f(x) = x$ .
  - (a) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  équivaut à  $(1 - x)e^x - x = 0$
  - (b) Étudier les variations de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = (1 - x)e^x - x$  et en déduire que l'équation  $f(x) = x$  a une unique solution que l'on notera  $\alpha$  et qu'elle appartient à l'intervalle  $[0; 1]$ .
  - (c) Déterminer une valeur approchée à 0.1 près de  $\alpha$  (vous avez droit à la calculatrice, mais détaillez les calculs et le raisonnement effectués).
  - (d) Tracer la courbe représentative de  $f$  en tenant compte de tous les calculs effectués dans la première partie.
3. Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
  - (a) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
  - (b) Montrer que la suite converge vers  $\alpha$ .
  - (c) Écrire un programme en PASCAL qui demande une valeur  $n$  à l'utilisateur et affiche la valeur de  $u_n$ .
4. Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_0 = 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = f(v_n)$ .
  - (a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est à termes positifs.
  - (b) En déduire que pour tout entier  $n$ ,  $|v_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|v_n - \alpha|$ , puis que  $|v_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}$ , et enfin que la suite  $(v_n)$  converge également vers  $\alpha$ .
  - (c) Soit  $\varepsilon > 0$ . Déterminer en fonction de  $\varepsilon$  une valeur de  $n$  pour laquelle  $|v_n - \alpha| \leq \varepsilon$ .
  - (d) Écrire un programme en PASCAL qui demande une valeur  $\varepsilon$  à l'utilisateur et affiche une valeur approchée de  $\alpha$  à  $\varepsilon$  près.