Feuilles d'exercices de révision n°2 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

26 novembre 2009

Exercice 1

1. Ce sont des arrangements, donc $8 \times 7 \times 6 = 336$ classements possibles.
2. Il y en a $3 \times 2 \times 1 = 6$ (autre façon de voir les choses, ce sont les permutations des trois athlètes américains).
3. Il y a $5 \times 4 \times 3 = 60$ podiums qui ne contiennent pas d'athlètes américains (puisque 5 athlètes ne sont pas américains), donc $336 - 60 = 276$ podiums contenant au moins un américain.
4. Il faut choisir l'américain parmi trois possibles, les deux autres parmi les cinq autres athlètes, et l'ordre, soit $\binom{3}{1} \times \binom{5}{2} \times 3! = 3 \times 10 \times 6 = 180$ podiums avec exactement un américain.

Exercice 2

1. Il y a neuf cases et trois choix pour chaque, donc $3^9 = 19\,683$ coloriages possibles au total.
2. S'il n'y a pas de rouge, il reste deux possibilités pour chaque case, soit $2^9 = 512$ coloriages sans rouge.
3. Notons A l'ensemble des coloriages sans rouge, B ceux sans blanc et C ceux sans noir. Par la formule de Poincaré, $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$. Or, $|A| = |B| = |C| = 2^9$ (c'est la question précédente !) ; $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 1$ (en effet, si on s'interdit deux couleurs sur les trois, il ne reste plus qu'un coloriage, celui où toutes les cases sont de la troisième couleur), et $|A \cap B \cap C| = 0$ (on ne peut pas supprimer les trois couleurs), donc $|A \cup B \cup C| = 3(2^9 - 1)$. Or, l'ensemble $A \cup B \cup C$ est exactement le complémentaire de l'ensemble des coloriages utilisant les trois couleurs, qui sont donc au nombre de $3^9 - 3(2^9 - 1) = 18\,150$.
4. Il faut choisir quelles sont les trois cases noires parmi les neuf, puis il reste deux choix de couleurs possibles pour chacune des six cases restantes, soit $\binom{9}{3} \times 2^6 = 5\,376$ coloriages.

5. Il y a soit 0 case blanche (2^9 cas), soit une case blanche ($\binom{9}{1} \times 2^8$ cas), soit deux ($\binom{9}{2} \times 2^7$ cas), donc au total 7 424 possibilités.
6. Il faut choisir les deux cases qui seront noires, puis les trois cases blanches parmi les sept restantes. On n'aura alors plus le choix pour les quatre cases rouges. Il y a donc $\binom{9}{2} \times \binom{7}{3} = 1\ 260$ possibilités.
7. Il y a trois choix possibles pour la couleur de chaque ligne, donc $3^3 = 27$ coloriages possibles.
8. Cela revient à choisir une permutation des couleurs, donc $3! = 6$ possibilités.
9. Il y a $3!$ choix possibles pour la première ligne (il faut une case de chaque couleur), encore deux possibilités pour la première case de la deuxième ligne, mais ensuite tout est imposé (je vous laisse le vérifier), donc il y a seulement $3! \times 2 = 12$ possibilités.

Exercice 3

1. (a) Si les tirages sont simultanées il y en a $\binom{n}{p}$.

   (b) Cela signifie qu'on a tiré la boule numéro k (pas de choix possible pour celle-là), et que les $p-1$ autres boules tirées ont un numéro strictement inférieur à k, donc compris entre 1 et $n-1$. Il y a donc $\binom{k-1}{p-1}$ choix possibles.

   (c) Quand on tire p boules dans un lot de n, le plus grand numéro tiré est necessairement compris entre p et n. Si on fait la somme des résultats de la question précédente pour k compris entre p et n, on doit donc trouver le nombre total de tirages possibles, c'est-à-dire que $\sum_{k=p}^{k=n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.

2. (a) Puisqu'il y a remise possible, il y a n^p tirages possibles.

   (b) La première boule étant imposée, il reste n choix pour chacun des $p-1$ tirages restants, soit n^{p-1} tirages.

   (c) Les $p-2$ tirages intermédiaires peuvent donner n'importe quel résultat, soit n^{p-2} possibilités. Quand aux deux boules extrêmes, puisqu'on sait qu'elles ont des numéros différents et que leur ordre est imposé, on les connait dès qu'on a choisi les deux numéros dans la liste de n possibles, il y a donc pour elles $\binom{n}{2}$ possibilités. Cela fait un total de $n^{p-2} \times \binom{n}{2} = \frac{n^{p-1}(n-1)}{2}$ tirages possibles.

(d) Il faut choisir les deux numéros tirés (parmi n possibles), et choisir par exemple quels sont les tirages où on a obtenu le plus petit des deux numéros. Ces tirages forment un sous-ensemble de l'ensemble des p tirages, qui ne doit pas être vide ni être constitué de tous les tirages (sinon on n'a en fait tiré qu'un seul numéro). Il y a $2^p - 2$ tels sous-ensembles de tirages (puisqu'il y a 2^p sous-ensembles de tirages au total, et qu'on en a interdit 2), donc le nombre de tirages cherché est $(2^p - 2)\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} = (2^{p-1} - 1)n(n-1)$.

(e) Les boules étant numérotées à partir de 1, la somme des numéros tirés vaut au moins p. Si on veut qu'elle soit égale à $p+2$, il n'y a que deux possibilités : on a tiré $p-1$ fois le numéro 1 et une fois le numéro 3 (p possibilités, il suffit de choisir le tirage où on a obtenu le 3) ; ou bien $p-2$ fois le numéro 1 et deux fois le numéro 2 (il faut choisir les deux tirages en question, soit $\begin{pmatrix} p \\ 2 \end{pmatrix}$ possibilités). Il y a donc $p + \dfrac{p(p-1)}{2} = \dfrac{p(p+1)}{2}$ tirages possibles.

Exercice 4

1. Le trinome $x^2 - x + 1$ ayant pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$, il est toujours strictement positif, et la fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
2. La fonction racine carrée étant strictement croissante sur son ensemble de définition, on peut se contenter d'étudier les variations du trinome à l'intérieur de la racine. Sa dérivée est $2x - 1$, donc la fonction f est strictement décroissante sur $\left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$. elle admet pour minimum $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + 1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ses limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont de façon immédiate égales à $+\infty$.
3. Calculons donc via multiplication par la quantité conjuguée $f(x) - x = \sqrt{x^2 - x + 1} - x = \dfrac{x^2 - x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} = \dfrac{1 - x}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x} = \dfrac{\frac{1}{x} - 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$ (on divise tout par x en haut et en bas, ce qui revient à diviser ce qui se trouve dans la racine carrée par x^2). Le dénominateur de cette expression étant positif, elle est du signe de $\dfrac{1}{x} - 1$. Or, si $x > 0$, $\dfrac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow x > 1$, donc $f(x) - x > 0$ sur $]0; 1]$, et $f(x) - x < 0$ sur $[1; +\infty[$.
4. La seule solution est manifestement 1.
5. C'est vrai non seulement sur $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$, mais sur $\mathbb{R}$ tout entier au vu de l'étude des variations de f. On a donc $|f(x) - 1| = |\sqrt{x^2 - x + 1} - 1| = \left|\dfrac{x^2 - x + 1 - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + 1}\right| =$

$\dfrac{|x||x-1|}{|f(x)+1|}$. Or, $|x| \leq 1$, et $|f(x)+1| \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}+1 > \sqrt{3}$, donc $|f(x)-1| \leq \dfrac{|x-1|}{\sqrt{3}}$.

6. C'est une récurrence toute simple : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ appartient bien à l'intervalle voulu, et si u_n est dans cet intervalle, comme f est croissante sur $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$, on aura $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leq f(u_n) \leq f(1)$, soit $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$. Comme $\dfrac{\sqrt{3}}{2} > \dfrac{1}{2}$, on a bien $u_{n+1} \in \left[\dfrac{1}{2};1\right]$, ce qui achève la récurrence.
7. On a vu plus haut que sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$, on avait $f(x) - x > 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$, et la suite (u_n) est croissante.
8. Étant croissante et majorée par 1, la suite converge. Sa limite ne peut être qu'un point fixe de la fonction, qui n'en a qu'un. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
9. Pour $n = 0$, on a bien $|u_0 - 1| \leq |u_0 - 1|$. Supposons le résultat vérifié au rang n, on a alors d'après la question 5 $|u_{n+1} - 1| = |f(u_n) - 1| \leq \dfrac{|u_n - 1|}{\sqrt{3}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}} \times \dfrac{|u_0 - 1|}{\sqrt{3}^n} = \dfrac{|u_0 - 1|}{\sqrt{3}^{n+1}}$, ce qui achève la récurrence.
10. On sait que $|u_n - 1|$ sera inférieur à ε dès que $\dfrac{1}{2(\sqrt{3})^n}$ le sera, d'où le programme suivant :

```
PROGRAM youplaboum;
USES wincrt;
VAR u,e,z : real; n : integer;
BEGIN
WriteLn('Choisissez la valeur de epsilon');
ReadLn(e);
u :=1/2; n :=0; z :=1/2;
REPEAT
n :=n+1;
z :=z/sqrt(3);
u :=sqrt(u*u-u+1);
UNTIL z < e;
WriteLn(n);
END.
```