# Feuilles d'exercices de révision n°2

ECE3 Lycée Carnot

26 novembre 2009

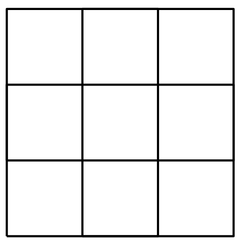
## Exercice 1

Lors de la finale du 100 mètres, huit coureurs se disputent les trois places du podium. Parmi eux, trois sont américains.

1. Combien y a-t-il de podiums possibles (il va de soi que l'ordre est important) ?
2. Combien de podiums sont 100% américains ?
3. Combien de podiums contiennent au moins un athlète américain ?
4. Combien de podiums contiennent exactement un athlète américain ?

## Exercice 2

On dispose de trois couleurs (par exemple blanc, noir et rouge) pour colorier la grille suivante :



Chaque case est coloriée d'une seule couleur. Chacune des réponses doit être justifiée.

1. Combien y a-t-il de coloriages possibles ?
2. Parmi ceux-ci, combien n'utilisent pas la couleur rouge ?
3. Combien de coloriages utilisent les trois couleurs ?
4. Combien de coloriages avec exactement trois cases noires ?
5. Combien de coloriages avec au plus deux cases blanches ?
6. Combien de coloriages avec deux cases blanches et trois noires (et donc quatre rouges) ?
7. Combien de coloriages pour lesquels chaque ligne est unicolore ?
8. Combien de coloriages avec chaque ligne unicolore et une ligne de chaque couleur ?
9. Combien de coloriages avec une case de chaque couleur dans chaque ligne et dans chaque colonne ?

## Exercice 3

Dans une urne se trouvent $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On tire $p$ boules dans l'urne.

1. On suppose tout d'abord que les tirages sont simultanés.
   (a) Quel est le nombre total de tirages possibles ?
   (b) Déterminer le nombre de tirages pour lesquels le plus grand numéro tiré est le numéro $k$ (en supposant $p \leq k \leq n$).
   (c) En déduire la formule $\displaystyle\sum_{k=p}^{k=n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}$.
2. On suppose désormais les tirages successifs avec remise.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien de tirages commencent par la boule n°2 ?
   (c) Combien de tirages pour lesquels le premier numéro tiré est strictement inférieur au dernier ?
   (d) Combien de tirages où on a tiré exactement deux numéros différents ?
   (e) Combien de tirages pour lesquels la somme des numéros tirés vaut $p+2$ ?

## Exercice 4

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ et la suite récurrente $(u_n)$ définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Déterminer le domaine de définition de $f$.
2. Étudiez les variations de $f$ et dresser son tableau de variations en précisant les limites éventuelles.
3. Montrer que, $\forall x > 0$, $f(x) - x = \dfrac{\frac{1}{x} - 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$, et en déduire le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Montrer que $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$, $f(x) \geq \sqrt{\dfrac{3}{4}}$, et en déduire que $\forall x \in \left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$, $|f(x) - 1| \leq \dfrac{|x-1|}{\sqrt{3}}$
6. Montrer que la suite $(u_n)$ prend toutes ses valeurs dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}; 1\right]$.
7. Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$.
8. Déterminer la nature et la limite éventuelle de $(u_n)$.
9. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 1| \leq \dfrac{|u_0 - 1|}{\sqrt{3}^n}$.
10. Écrire un programme Pascal calculant une valeur de $n$ pour laquelle $|u_n - 1| < \varepsilon$, où $\varepsilon$ est un réel positif choisi par l'utilisateur.