Feuille d'exercices de révision n°1 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

16 octobre 2009

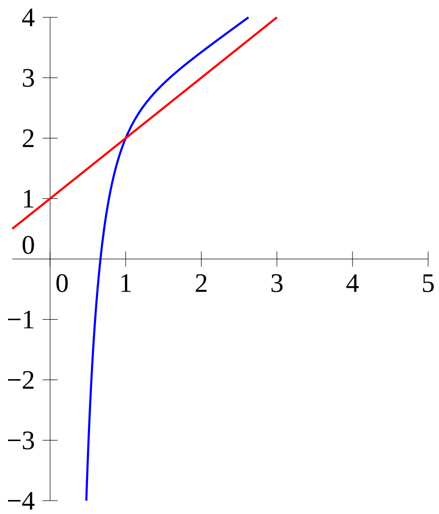
Exercice 1

1. En posant $X = e^x$, on se ramène à l'équation du troisième degré $X^3+3X^2-2X-2=0$, qui a pour racine évidente 1 et se factorise en $(X-1)(X^2+4X+2)=0$. Ne reste plus qu'à trouver les racines de la deuxième parenthèse, on obtient $\Delta = 8$, puis $x_1 = -2-\sqrt{2}$ et $x_2 = -2+\sqrt{2}$. L'équation initiale a donc trois solutions.
2. L'inéquation est bien définie si $x > \dfrac{3}{2}$ et devient après simplification $\dfrac{2x-3}{x+1} \leqslant 3$, soit $\dfrac{-x-6}{x+1} \leqslant 0$, d'où $x \in]-\infty;-6] \cup]-1;+\infty[$. Vu le domaine de définition, on obtient en fait $\mathcal{S} = \left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$.
3. On cherche en fait les réels x vérifiant $2 \leqslant x^2+x-4 < 3$, ce qui revient à résoudre deux inéquations du second degré. L'inégalité de droite donne $x \in]-\infty;-3] \cup [2;+\infty[$, et la deuxième $x \in \left]\dfrac{-1-\sqrt{29}}{2};\dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}\right[$, soit finalement $\mathcal{S} = \left]\dfrac{-1-\sqrt{29}}{2};-3\right] \cup \left[2;\dfrac{1+\sqrt{29}}{2}\right[$.
4. Après avoir un joli tableau, on obtient en fait quatre équations du decond degré à résoudre : si $x \leqslant -1$, $(1-4x)-(3x^2+2x-1)=3$ donne deux solutions $x_1 = \dfrac{6+\sqrt{24}}{-6} = -1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (valable) et $x_2 = \dfrac{\sqrt{6}}{3}-1$ (pas valable) ; si $-1 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{4}$, $(1-4x)+(3x^2+2x-1)=3$ donne deux solutions $x_3 = \dfrac{2+\sqrt{40}}{6} = \dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ (pas valable) et $x_2 = \dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ (valable) ; si $\dfrac{1}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{3}$, $(4x-1)+(3x^2+2x-1)=3$ donne deux solutions $x_5 = \dfrac{-6+\sqrt{24}}{6} = -1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (pas valable) et $x_6 = -1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (pas valable) ; enfin, si $x \geqslant \dfrac{1}{3}$, $(4x-1)-(3x^2+2x-1)=3$ n'a pas de solution (discriminant négatif). Il y a donc deux solutions à l"'équation proposée.

Exercice 2

1. Je pense que vous arriverez à le faire tous seuls.
2. On obtient par identification $h(x) = (x-1)(3x^2+3x+2)$.
3. Le trinôme $3x^2+3x+2$ a un discriminant négatif, il est toujours positif, donc h est du signe de $x-1$, c'est-à-dire positif sur $[1;+\infty[$ et négatif sur $]-\infty;1]$.
4. Sans problème, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}_+^*$, puis $g'(x) = 3x^2-1-\dfrac{2}{x} = \dfrac{h(x)}{x}$.
5. La fonction g est donc décroissante sur $]-\infty;1]$ et croissante ensuite, avec pour minimum $g(1)=3$, donc elle est toujours strictement positive.
6. Tout comme g, f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. Il n'y a pas de forme indéterminée en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$. En $+\infty$, c'est à peine plus compliqué, le quotient tend vers 0 (un petit coup de croissance comparée), mais il reste $x+1$ qui fait que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

8. On a $f'(x) = 1 + \dfrac{(1+\frac{1}{x})x^2 - 2x(x-1+\ln x)}{x^4} = \dfrac{x^4 + x^2 + x - 2x^2 + 2x - 2x\ln x}{x^4}$ $= \dfrac{x^4 - x^2 + 3x - 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{g(x)}{x^3}$. La fonction f est donc strictement croissante.
9. $f(x) - (x+1) = \dfrac{x-1+\ln x}{x^2}$, qui est du signe de $x - 1 + \ln x$. Comme $x - 1$ et $\ln x$ sont tous deux négatifs entre 0 et 1 et positifs ensuite, on en déduit que la courbe est sous la droite sur $]0;1]$, et au-dessus sur $[1;+\infty[$.
10. Et voilà les courbes demandées :



Exercice 3

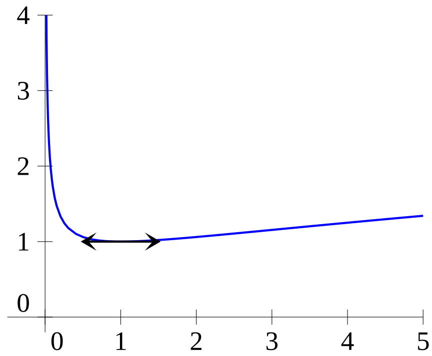
1. La suite étant définie dès que $u_n \neq -1$, prouver par récurrence que $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$ suffit. C'est vrai pour u_0, et si on le suppose vrai pour u_n, alors $\dfrac{3}{2} \leqslant u_n + 1 \leqslant 2$, donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{u_n+1} \leqslant \dfrac{2}{3}$. Or $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 2 - 2}{u_n + 1} = 2 - \dfrac{2}{u_n+1}$. On a donc $\dfrac{4}{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$, ce qui achève la démonstration.
2. Calculons $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n}{u_n+1} - u_n = \dfrac{2u_n - u_n^2 - u_n}{u_n+1} = \dfrac{u_n(1-u_n)}{u_n+1}$, qui est positif en utilisant ce qui précède. La suite est donc croissante.
3. La suite (u_n) étant croissante et majorée par 1, elle converge. Sa limite l vérifie $l = \dfrac{2l}{l+1}$, soit $l^2 + l = 2l$, donc $l(l-1) = 0$. La limite ne pouvant être égale à 0 pour une suite dont les valeurs sont supérieures à $\dfrac{1}{2}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 4

1. En effet $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k^2+k} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$, puisque $k^2 \leqslant k^2 + k$. L'autre inégalité est similaire.
2. C'est une somme télescopique, qui vaut $1 - \dfrac{1}{n}$. En faisant la somme des ineagalités obtenues à la question précédente, on obtient donc $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+1} \leqslant S_n \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}$
3. C'est une conséquence immédiate de la question précédente.
4. Comme $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, la suite est croissante. Étant majorée par 1, elle converge donc.

Exercice 5

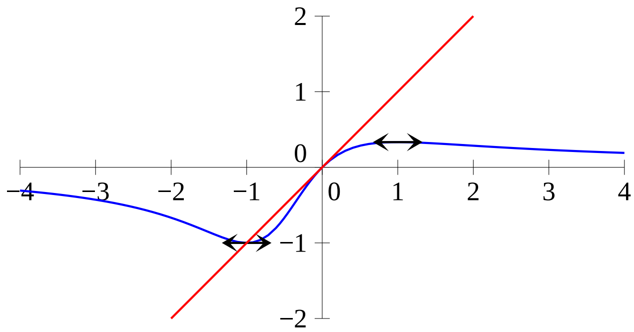
1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x} - \frac{1+x}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \dfrac{2x - (1+x)}{\sqrt{x}(2\sqrt{x})^2} = \dfrac{x-1}{4x\sqrt{x}}$. La fonction est donc décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$. Son minimum vaut $f(1) = \dfrac{2}{2\sqrt{1}} = 1$ et sa courbe ressemble à ceci :



2. Calculons $f(x) - x = \dfrac{1 + x - 2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, qui est du signe de $1 + x - 2x\sqrt{x}$. Notons $X = \sqrt{x}$, on a alors $1 + x - 2x\sqrt{x} = 1 + X^2 - 2X^3 = (1 - X)(1 + X + 2X^2)$. La deuxième parenthèse est toujours positive sur $\mathcal{D}_f$, la position relative dépend du signe de $1 - \sqrt{x}$, qui est positif quand $x \leqslant 1$. La courbe est donc au-dessus de la droite sur $]0;1]$ et en-dessous ensuite.
3. La suite est bien définie si toutes les valeurs de la suite sont strictement positives, donc il est largement suffisant de prouver que $u_n \geqslant 1$. Pour une fois, même pas besoin de récurrence, puisque $\forall n \geqslant 1$, $u_n = f(u_{n-1}) \geqslant 1$ puisque la fonction f ne prend pas de valeurs plus petites que 1.
4. En effet, $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$. Or, on a vu à la question 3 que $u_n \geqslant 1$, et à la question 2 que si $x \geqslant 1$, $f(x) - x \leqslant 0$. Conclusion, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et la suite est bien décroissante.
5. La suite est décroissante et minorée par 1, elle converge donc. Sa limite l vérifie $l = \dfrac{1+l}{2\sqrt{l}}$, ce qui n'arrive d'après le calcul de la question 2 que pour $l = 1$, donc la suite tend vers 1.

Exercice 6

1. La fonction f est définie si $x^2 + x + 1 > 0$, ce qui est en fait toujours le cas (ce trinome a undiscriminant négatif), donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
2. Dérivons donc : $f'(x) = \dfrac{x^2 + x + 1 - x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2} = \dfrac{(1+x)(1-x)}{(x^2+x+1)^2}$. La fonction f est donc croissante sur $[-1;1]$, et décroissante sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$. Les seules limites à calculer sont celles en $\pm\infty$. En utilisant la factorisation par les termes de plus haut degré, on obtient facilement que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Tant qu'on y est, constatons que $f(-1) = -1$, et $f(1) = \dfrac{1}{3}$.
3. On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, donc la tangente en 0 a pour équation $y = x$.
4. On a $f(x) - x = \dfrac{x - (x^3 + x^2 + x)}{x^2 + x + 1} = \dfrac{-x^3 - x^2}{x^2 + x + 1} = \dfrac{-x^2(x+1)}{x^2+x+1}$. Cette fraction est du signe de $x + 1$, donc $\mathcal{C}$ est en-dessous de T sur $]-\infty;-1]$, et au-dessus sur $[1;+\infty[$.
5. Voici un joli graphique :



6. On a $f\left(\dfrac{1}{p}\right) = \dfrac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}+1} = \dfrac{p}{1+p+p^2} \leqslant \dfrac{p}{p+p^2} = \dfrac{1}{p+1}$.
7. Pour $n = 0$, on a bien $0 < 1 \leqslant \dfrac{1}{0+1}$. Supposons donc $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. D'après la question précédente, on a alors $f(u_n) \leqslant \dfrac{1}{n+2}$, donc $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$. Par ailleurs, $\forall x > 0$, $f(x) > 0$ (regarder le tableau de variations et utiliser que $f(0) = 0$) donc $u_n > 0 \Rightarrow u_{n+1} > 0$, ce qui achève la récurrence.
8. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que (u_n) tend vers 0.
9. Par définition $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+u_n+1}$, donc $\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{u_n^2+u_n+1}{u_n} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}$.
10. Une petite récurrence semble s'imposer : pour $n = 1$, la proposition prétend que $\dfrac{1}{u_1} \leqslant 2+1 = 3$, ce qui est vrai puisque $u_1 = f(1) = \dfrac{1}{3}$. Supposons la propriété vraie au rang n, et utilisons la question précédente : $\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{u_n} + 1 + u_n \leqslant n + 1 + \sum\limits_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{k} + 1 + u_n$. Il ne reste plus qu'à utiliser la majoration de la question 7 pour obtenir exactement la formule voulue pour achever la récurrence.
11. On a donc $\dfrac{1}{u_n} \leqslant n + 2 + \ln n$, ou encore $1 \leqslant nu_n - 2u_n + u_n \ln n$, soit $nu_n \geqslant 1 + 2u_n - u_n \ln n$. Comme $u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, la limite de $u_n \ln n$ vaut 0, donc nu_n est plus grand qu'une suite tendant vers 1. Or on a aussi $nu_n \leqslant \dfrac{n}{n+1}$, avec le terme de droite qui tend vers 1. Conclusion via le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$.