Feuille d'exercices de révision n°1

ECE3 Lycée Carnot

16 octobre 2009

Exercice 1

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $e^{3x} + 3e^{2x} - 2e^x = 2$
2. $\ln(2x-3) - \ln(x+1) \leqslant \ln(3)$
3. $Ent(x^2 + x - 4) = 2$
4. $|4x-1| - |3x^2 + 2x - 1| = 3$

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = x + 1 + \dfrac{x - 1 + \ln x}{x^2}$, et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. On définit également les fonctions auxilaires $g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln x$ et $h(x) = 3x^3 - x - 2$.

1. Vérifier que 1 est racine du polynome h.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $h(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
3. Étudier le signe de h à l'aide des question précedentes.
4. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g et calculer sa dérivée g'.
5. À l'aide des questions précédentes, dresser le tableau de variations de la fonction g, puis en déduire que $g(x) > 0$ sur $\mathcal{D}_g$.
6. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
7. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
8. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$, et en déduire le tableau de variations de f.
9. Étudier la position relative de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = x+1$.
10. Tracer dans un même repère cette courbe et cette droite.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 1}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) est monotone.
3. En déduire que la suite converge, et déterminer sa limite (on utilisera le fait que, si u_{n+1} est de la forme $f(u_n)$, avec f continue, alors la limite de la suite vérifie nécessairement $f(l) = l$).

Exercice 4

On considère la suite $(S_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $S_n = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que, si $k \geqslant 2$, alors $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
2. Calculer $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, et en déduire un encadrement de S_n.
3. Montrer que, $\forall n \geqslant 2$, $S_n \leqslant 1$.
4. Montrer que (S_n) est une suite croissante, et en déduire que (S_n) est convergente.

Exercice 5

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = \frac{1+x}{2\sqrt{x}}$.

1. Étudier les variations de f sur son ensemble de définition, et tracer une allure de sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.
2. On note D la droite d'équation $y = x$. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de D.
3. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que, $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 1$.
4. Montrer que la suite est décroissante à partir de $n = 1$ (vous pouvez utiliser le résultat de la question 2).
5. En déduire que la suite converge, puis déterminer sa limite l, en utilisant le fait que celle-ci vérifie $f(l) = l$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier les variations de f et calculer ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 0.
4. Étudier la position relative et les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de T.
5. Construire dans un même repère la courbe $\mathcal{C}$ et la droite T.
   On considère désormais la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
6. Soit $p \in \mathbb{N}$, prouver que $f\left(\frac{1}{p}\right) \leqslant \frac{1}{p+1}$.
7. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
8. Déterminer la limite de la suite (u_n).
9. Vérifier que $\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$.
10. En déduire, à l'aide du résultat de la question 7, que $\forall n \geqslant 1$, $\frac{1}{u_n} \leqslant n + 1 + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$.
11. En admettant que $\forall n \geqslant 2$, $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n$, déterminer la limite de nu_n.