Exercices et problèmes de révision pour le Concours Blanc

ECE3 Lycée Carnot

16 avril 2010

Exercice 1

Le trinôme P a pour racine évidente 1, donc $P(x) = (x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$, d'où par identification $a=2$, $b=-4+a=-2$, et $c=-22+b=-24$. On a donc $P(x) = 2(x-1)(x^2-x-12)$, et le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 1+48=49$, donc admet deux racines réelles $x_1 = \dfrac{1+7}{2} = 4$ et $x_2 = \dfrac{1-7}{2} = -3$. Finalement, on obtient $P(x) = 2(x-1)(x-4)(x+3)$.

Pour Q, posons $X = e^x$ pour nous ramener à l'étude de $Q(X) = X^3 + \dfrac{7}{12}X^2 - \dfrac{7}{12}X - \dfrac{1}{6}$. On constate que $X=-1$ est racine du trinôme puisque $-1+\dfrac{7}{12}+\dfrac{7}{12}-\dfrac{1}{6} = 0$, donc $Q(X) = (X+1)(aX^2+bX^2+c) = aX^3+(b+a)X^2+(c+b)X+c$, avec par identification $a=1$, $b=-\dfrac{5}{12}$ et $c=-\dfrac{1}{6}$, d'où $Q(X) = (X+1)\left(X^2-\dfrac{5}{12}-\dfrac{1}{6}\right)$. La deuxième parenthèse a pour discriminant $\Delta = \dfrac{25}{144}+\dfrac{4}{6} = \dfrac{121}{144} = \left(\dfrac{11}{12}\right)^2$, et admet donc pour racines $X_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{12}+\dfrac{11}{12}\right) = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$; et $X_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5}{12}-\dfrac{11}{12}\right) = -\dfrac{3}{12} = -\dfrac{1}{4}$. Finalement, on a $Q(X) = (X+1)\left(X-\dfrac{2}{3}\right)\left(X+\dfrac{1}{4}\right)$, soit $P(x) = (e^x+1)\left(e^x-\dfrac{2}{3}\right)\left(e^x+\dfrac{1}{4}\right)$.

Exercice 2

1. La suite (u_n) est bien définie si elle ne prend jamais la valeur -4, prouver par récurrence qu'elle est à valeurs strictement positives suffira donc. Or, $u_0 = 2 > 0$ et si on suppose $u_n > 0$, $3+2u_n$ et u_n+4 sont strictement positifs, donc leur quotient aussi, ce qui prouve que $u_{n+1} > 0$ et achève la récurrence.

2. Si $u_{n+1} = 1$, on a donc $u_n + 4 = 3 + 2u_n$, ce qui donne effectivement $u_n = 1$. Supposons par l'absurde que u_n prenne la valeur 1 et notons n_0 le plus petit entier pour lequel $u_{n_0} = 1$. On a alors $n_0 \geqslant 2$ (puisque $u_0 \neq 1$) mais d'après le calcul précédent u_{n_0-1} est aussi égal à 1, ce qui contredit la définition de n_0. Conclusion : la suite ne prend jamais la valeur 1.

3. Calculons donc $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3} = \dfrac{\frac{3+2u_n}{u_n+4}-1}{\frac{3+2u_n}{u_n+4}+3} = \dfrac{3+2u_n-u_n-4}{3+2u_n+3u_n+12} = \dfrac{u_n-1}{5u_n+15} = \dfrac{1}{5}\dfrac{u_n-1}{u_n+3} = \dfrac{1}{5}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+3} = \dfrac{1}{5}$, donc $v_n = \dfrac{1}{5^{n+1}}$. Comme $v_n = \dfrac{u_n-1}{u_n+3}$, on a par ailleurs $v_nu_n+3v_n = u_n-1$, soit $3v_n+1 = u_n(1-v_n)$, donc $u_n = \dfrac{3v_n+1}{1-v_n} = \dfrac{\frac{3}{5^{n+1}}+1}{1-\frac{1}{5^{n+1}}}$.

Exercice 3

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ 7x & + & 3y & - & 5z & = & 2 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ 5x & & & - & 5z & = & -5 \\ -5x & & & + & 6z & = & 2 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ x & & & - & z & = & -1 \\ & & & & z & = & -3 \end{array}\right.$$

On remonte le système : $x = z - 1 = -4$ et $3y = 4 - 2x - z = 15$, donc $y = 5$. Il y a une unique solution : $\mathcal{S} = \{(-4; 5; -3)\}$.

Exercice 4

On a $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ donc $B^2 = 3B$. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $A^n = 2^n I + \dfrac{5^n - 2^n}{3} B$. Pour $n = 0$, $A^0 = I$ et $2^0 I + \dfrac{5^0 - 2^0}{3} B = I$, donc la propriété est vraie. Supposons-la vérifiée au rang n, on a alors $A^{n+1} = A \times A^n = A\left(2^n I + \dfrac{5^n - 2^n}{3} B\right) = (B + 2I)\left(2^n I + \dfrac{5^n - 2^n}{3} B\right)$ par définition de B. En développant, on obtient $A^{n+1} = 2^n B + 2^{n+1} I + \dfrac{5^n - 2^n}{3} B^2 + \dfrac{2(5^n - 2^n)}{3} B = 2^{n+1} I + \dfrac{3 \times 2^n B}{3} + \dfrac{3 \times 5^n - 3 \times 2^n}{3} B + \dfrac{2 \times 5^n - 2 \times 2^n}{3} B = 2^{n+1} I + \dfrac{5 \times 5^n - 2 \times 2^n}{3} B = 2^{n+1} I + \dfrac{5^{n+1} - 2^{n+1}}{3} B$, ce qui prouve l'hérédité et achève la récurrence. Pour $n = 4$, on obtient $A^4 = 16I + 203B = \begin{pmatrix} 219 & 203 & 203 \\ 203 & 219 & 203 \\ 203 & 203 & 219 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

- Il s'agit d'arrangements de trois éléments dans un ensemble à dix éléments, il y a $\dfrac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ tirages possibles.
- On peut obtenir soit trois boules noires, soit trois boules vertes, ce qui donne $\dfrac{5!}{2!} + \dfrac{3!}{0!} = 5 \times 4 \times 3 + 3 \times 2 \times 1 = 66$ tirages possibles.
- Il y a six boules dont le numéro est strictement plus petit que 3, donc $\dfrac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120$ tirages possibles.
- Soit le numéro apparaissant deux fois est un 3, ce qui ne laisse pas de choix pour les deux boules correspondantes, mais 8 possibilités pour la troisième boule et 3! choix pour l'ordre des trois boules, soit le numéro apparaissant deux fois est un 1 ou un 2, ce qui laisse $\dbinom{3}{2}$ choix pour les deux boules, 7 choix pour la troisième boule, et 3! permutations possibles. Il y a donc au total $8 \times 3! + 2 \times \dbinom{3}{2} \times 7 \times 3! = 300$ tirages possibles.
- Il y en a $5 \times 3 \times 2 \times 3! = 180$.

Avec des tirages simultanés, il n'y a plus que $\binom{10}{3} = 120$ tirages possibles au total. On peut toujours obtenir trois boules noires ou trois boules vertes, donc $\binom{5}{3} + \binom{3}{3} = 11$ tirages possibles. De même, les réponses à toutes les autres questions seront les mêmes que précédemment à une division par 3! près, puisqu'on ne tient plus compte de l'ordre (si on travaillait avec des probabilités, les deux situations donneraient les mêmes résultats).

Exercice 6

1. La fonction f_n est strictement croissante sur $[0;1]$ comme somme de fonctions croissantes. De plus, $f(0) = -1$ et $f(1) = n - 1 \geqslant 0$ puisque $n \geqslant 1$, donc, f étant bien entendue continue, elle est bijective et s'annule une fois sur $[0;1]$.
2. On sait que $f_n(a_n) = f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$. De plus, $\forall x \in [0;1]$, $f_{n+1}(x) = x^{n+1} + f_n(x) \geqslant f_n(x)$. on a donc $f_{n+1}(a_n) \geqslant f_n(a_n) = 0$, d'où $f_{n+1}(a_n) \geqslant f_{n+1}(a_{n+1})$. La fonction f_{n+1} étant croissante, $a_n \geqslant a_{n+1}$, et la suite est donc décroissante. Comme elle est à valeurs dans $[0;1]$, elle est de plus minorée, donc convergente.
3. On sait que $a_n^n + a_n^{n-1} + \cdots + a_n - 1 = 0$. En multipliant cette égalité par a_n, on obtient $a_n^{n+1} + a_n^n + \cdots + a_n^2 - a_n = 0$. En faisant la différence de ces deux égalités, on obtient $a_n^{n+1} - 2a_n + 1 = 0$, ce qui nous donne bien $\frac{a_n^{n+1}}{2} = a_n - \frac{1}{2}$. Or, comme a_n est décroissante, on a $\forall n \geqslant 2$, $a_n \leqslant a_2 < 1$, donc $a_n^{n+1} \leqslant a_2^{n+1}$. Comme $a_2 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} a_2^{n+1} = 0$, donc on a par le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n^{n+1} = 0$. En utilisant la dernière relation prouvée, on en déduit alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 7

1. Commençons par constater que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I$. Prouvons ensuite par récurrence la propriété $P_n : \exists (u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = u_n A + v_n I$. C'est vrai pour $n = 0$ puisque $A^0 = I = 0 \times A + 1 \times I$, donc $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$. Supposons la propriété vraie au rang n, on a alors $A^{n+1} = A \times A^n = A(u_n A + v_n I) = u_n A^2 + v_n A = u_n(A + 2I) + v_n A = (u_n + v_n)A + 2u_n I$. En posant $u_{n+1} = u_n + v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n$, on a donc prouvé la propriété P_{n+1}, ce qui achève la récurrence.
2. On a $a_{n+1} = 2u_{n+1} + v_{n+1} = 2(u_n + v_n) + 2u_n = 2(2u_n + v_n) = 2a_n$. La suite (a_n) est donc géométrique de raison 2, et de premier terme $a_0 = 2u_0 + v_0 = 1$, donc $a_n = 2^n$. Similairement, $b_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = u_n + v_n - 2u_n = -u_n + v_n = -b_n$, donc (b_n) est géométrique de raison -1 et de premier terme $b_0 = u_0 - v_0 = -1$, donc $b_n = (-1)^{n+1}$. Reste à déterminer u_n et v_n en fonction de a_n et b_n (pour l'instant, on a le contraire). Cela revient à résoudre un système, ou plus simplement à constater que $a_n + b_n = 3u_n$ et $a_n - 2b_n = 3v_n$, dont découle que $A^n = u_n A + v_n I = \frac{1}{3}(2^n A + (-1)^{n+1} A + 2^n I - 2(-1)^{n+1} I)$.

Exercice 8

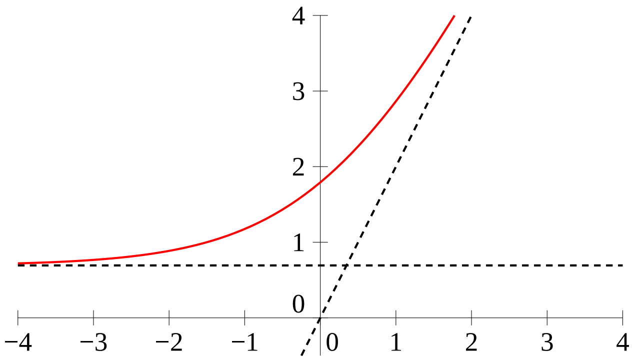
1. Chaque client a une chance sur trois de choisir le menu M_1, indépendamment des autres clients, et il y a n clients. Le nombre de clients choisissant le menu suit une loi binômiale de paramètre $\left(n, \frac{1}{3}\right)$. De même, $X_2 \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$ et $X_3 \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$.

2. La variable X_3 prenant les valeurs de 0 à n, $n - X_3$ prend les mêmes valeurs, et $P(n - X_3 = k) = P(X_3 = n-k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}\left(\frac{2}{3}\right)^k$. Autrement dit, $n - X_3 \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{3}\right)$.
3. On a bien sûr $X_1 + X_2 + X_3 = n$, soit $X_1 + X_2 = n - X_3$. La variable $X_1 + X_2$ suit donc une loi géométrique de paramètre n et $\frac{2}{3}$, ce qui n'a rien de surprenant (chaque client a une probabilité $\frac{2}{3}$ de choisir l'un des deux premiers menus, et on compte le nombre de clients parmi les n ayant fait ce choix).
4. (a) La probabilité que tous choisissent un menu fixé (le premier par exemple) vaut $\frac{1}{3^n}$, donc la probabilité que tout le monde choisisse le même menu quand il y en a 3 vaut $\frac{1}{3^{n-1}}$.
   (b) Il s'agit de l'évènement complémentaire du précédent, de probabilité $1 - \frac{1}{3^{n-1}}$.
   (c) Notons A_i les évènements « Le menu i n'a été choisi par aucun client », pour $i = 1, 2, 3$. On a d'après la formule de Poincaré $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Les trois premières probabilités valent $\left(\frac{2}{3}\right)^n$; chacune des trois suivantes vaut $\frac{1}{3^n}$ (puisque cela revient à dire que tout le monde a choisi le menu restant) et l'intersection des trois évènements est un évènement impossible. On a donc $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{3}{3^n} = \frac{2^n - 1}{3^{n-1}}$. La probabilité demandée est celle du complémentaire de $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, elle vaut donc $1 - \frac{2^n - 1}{3^{n-1}}$.

Exercice 9

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} + 3e^x + 2 \geqslant 2$. Sa limite en $+\infty$ vaut $+\infty$ (aucune difficulté), sa limite en $-\infty$ vaut $\ln 2$ (aucune difficulté non plus !). Il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = \ln 2$ en $-\infty$. Pour la branche infinie en $+\infty$, constatons que $e^{2x} + 3e^x + 2 = e^{2x}\left(1 + \frac{3}{e^x} + \frac{3}{e^{2x}}\right)$, donc $f(x) = \ln(e^{2x}) + \ln\left(1 + \frac{3}{e^x} + \frac{3}{e^{2x}}\right) = 2x + \ln\left(1 + \frac{3}{e^x} + \frac{3}{e^{2x}}\right)$. Le deuxième morceau tendant très fortement vers 0 en $+\infty$, on peut en déduire directement que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$.

La fonction f est bien sûr C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions usuelles, de dérivée $f'(x) = \frac{2e^{2x} + 3e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2}$. Cette dérivée étant toujours positive, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Enfin, $f''(x) = \frac{(4e^{2x} + 3e^x)(e^{2x} + 3e^x + 2) - (2e^{2x} + 3e^x)^2}{(e^{2x} + 3e^x + 2)^2}$
$= \frac{4e^{4x} + 12e^{3x} + 8e^{2x} + 3e^{3x} + 9e^{2x} + 6e^x - 4e^{4x} - 12e^{3x} - 9e^{2x}}{(e^{2x} + 3e^x + 2)^2} = \frac{3e^{3x} + 8e^{2x} + 6e^x}{(e^{2x} + 3e^x + 2)^2}$. Le numérateur étant toujours tout ce qu'il y a de plus positif, la fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$, et sa courbe ressemble à ceci :

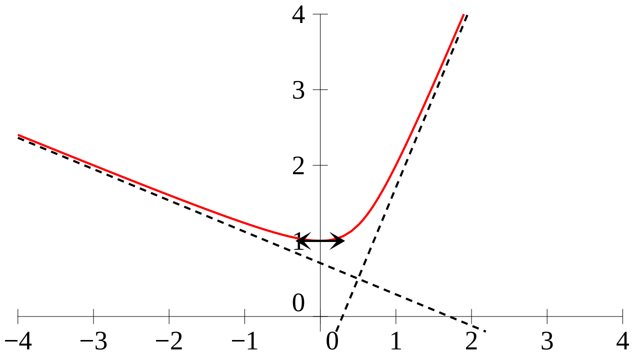


La fonction g est définie si $2x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$, ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 2 - 4 = -2$, il est toujours positif, donc $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$, et g est C^∞ sur $\mathbb{R}$, puisque ce qui se trouve sous la racine ne s'annule jamais. Remarquons tout de suite que $g(x) = x + \sqrt{2x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = x + |x|\sqrt{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$. Quand $x > 0$, $g(x) = x\left(1 + \sqrt{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)$, ce dont on déduit successivement que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1 + \sqrt{2}$; et enfin $g(x) - x(1+\sqrt{2}) = x\left(\sqrt{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{2}\right) = x \times \frac{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - 2}{\sqrt{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2}} = \frac{-2 + \frac{1}{x}}{\sqrt{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{2}}$, ce qui a pour limite $\frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ en $+\infty$. Conclusion : la courbe de g admet pour asymptopte oblique en $+\infty$ la droite d'équation $y = (1+\sqrt{2})x - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Du côté négatif, on a cette fois $g(x) = x\left(1 - \sqrt{2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}\right)$. Des calculs très similaires donnent $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1 - \sqrt{2}$; et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) - (1 - \sqrt{2})x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (au signe près, on a la même expression que ci-dessus). Il y a donc en $-\infty$ une autre asymptote oblique, d'équation $y = (1 - \sqrt{2})x + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Pour les variations, la fonction g est C^∞ sur $\mathbb{R}$, de dérivée $g'(x) = 1 + \frac{4x-2}{2\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}$. Cette dérivée est positive si $4x - 2 \geqslant -2\sqrt{2x^2 - 2x + 1}$. Ceci est toujours vérifié quand $x > \frac{1}{2}$, puisque le membre de gauche est alors positif alors que celui de droite est négatif. Si les deux membres sont négatifs, on peut élever au carré (en changeant le sens de l'inégalité) : $16x^2 - 16x + 4 \leqslant 4(2x^2 - 2x + 1)$, soit $8x^2 - 8x \leqslant 0$, donc x doit être situé entre les racines $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$. Finalement, la fonction g est tout simplement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$. Elle admet un minimum en 0, de valeur $f(0) = 1$.

Ne reste plus que la convexité : $g''(x) = \dfrac{8\sqrt{2x^2 - 2x + 1} - (4x-2)\frac{2(4x-2)}{2\sqrt{2x^2-2x+1}}}{4(2x^2 - 2x + 1)}$ $= \dfrac{8(2x^2 - 2x + 1) - (4x-2)^2}{4(2x^2 - 2x + 1)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{16x^2 - 16x + 8 - 16x^2 + 16x - 4}{4(2x^2 - 2x + 1)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{4}{4(2x^2 - 2x + 1)^{\frac{3}{2}}}$. La fonction g est donc convexe sur $\mathbb{R}$, et l'allure de la courbe est la suivante :



Exercice 10

La variable X prend donc tous les valeurs entières à partir de 1 (en effet, au vu de l'énoncé, on ne peut pas perdre au niveau 1). La probabilité que le joueur passe exactement k niveaux vaut, via la formule des probabilités composées, $\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{k} \times \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{k}{(k+1)!}$, donc $P(X = k) = \frac{k}{(k+1)!}$.

L'espérance de $X + 1$ est effectivement nettement plus facile à calculer, elle vaut $\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1) \times \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$. Si $E(X+1) = e$, on aura par linéarité $E(X) = e - 1$.

De même $E(X^2 - 1) = E((X-1)(X+1)) = \sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)(k+1) \times \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!} = e$ (pour $k = 1$, la valeur est nulle, d'où le décalage d'indice en bas de somme). Conclusion : $E(X^2) = e + 1$, puis par König-Huygens $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = e + 1 - (e-1)^2 = e + 1 - e^2 - 1 + 2e = e(3 - e)$ (qui est bien un nombre positif puisque $e < 3$).

Problème 1 (Ecricome 07, exercice 1)

1. Étude des variations de la fonction f_a

1. Manifestement, $\lim_{t \to +\infty} f_a(t) = +\infty$. Comme de plus, $f(t) = \frac{1}{2}t + \frac{a^2}{2t} = \frac{1}{2}t + o(1)$, la droite d'équation $y = \frac{1}{2}t$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$. Enfin, $f(t) - \frac{1}{2}t = \frac{a^2}{2t}$, qui est positif sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la courbe est située au-dessus de l'asymptote.
2. Sans difficulté aucune, on obtient $\lim_{t \to 0} f(t) = +\infty$, l'axe des ordonnées est donc asymptote verticale à la courbe.
3. La fonction est C^∞ sur $]0; +\infty[$, de dérivée $f_a'(t) = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2t^2} = \frac{t^2 - a^2}{2t^2}$. La fonction f_a est donc strictement décroissante sur $]0; a]$, et strictement croissante sur $[a; +\infty[$. Elle admet en a un minimum de valeur $f_a(a) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2}{a}\right) = a$.
4. C'est une conséquence immédiate du calcul de minimum de la question précédente.

2. Étude de la convergence de la suite (u_n)

1. Dans ce cas, la suite est constante (une récurrence évidente si on tient à le prouver rigoureusement).
2. Si $t > a$, $t^2 - a^2 > 0$, donc $f'(t) > 0$. De plus, $t^2 - a^2 < t^2$, donc $f'(t) < \dfrac{t^2}{2t^2} = \dfrac{1}{2}$, d'où l'encadrement demandé.
3. Il n'est même pas nécessaire de faire une récurrence : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = f(u_{n-1}) \geqslant a$ d'après la question 1.4.
4. La fonction f est C^1 sur $[a; +\infty[$, intervalle auquel appartiennent a et u_n et sur lequel $0 \leqslant f' \leqslant \dfrac{1}{2}$, on peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis (première version, celle sans valeur absolue) entre a et u_n : $0 \times (u_n - a) \leqslant f(u_n) - f(a) \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - a)$. Il ne reste plus qu'à remplacer $f(u_n)$ par u_{n+1} et $f(a)$ par a (cf calculs antérieurs). La deuxième partie est une récurrence classique : pour $n = 1$ c'est évident puisqu'on a $|u_1 - a|$ des deux côtés de l'inégalité. Si l'inégalité est vraie au rang n, alors $|u_{n+1} - a| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - a| \leqslant \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_1 - a|$, ce qui prouve l'inégalité au rang $n+1$.
5. Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - a = 0$, soit, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$.
6. Il suffit de prendre la fonction $f_{\sqrt{2}} : t \mapsto \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{2}{t}\right) = \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{t}$ et de construire la suite récurrente correspondante :

```
PROGRAM ecricome;
VAR u : real; i : integer;
FUNCTION f (x : real) : real;
BEGIN
f := x/2+1/x;
END;
BEGIN
u := 1;
FOR i := 1 TO 100 DO
BEGIN
u := f(u); WriteLn(u);
END;
END.
```

3. Recherche d'extremum d'une fonction à deux variables

1. Développons tout, ce sera aussi simple : $g(x, y) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)(1 + x + y + xy) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2y} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2y} + \dfrac{y}{2x} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} = \dfrac{1+y}{2x} + \dfrac{1+x}{2y} + \dfrac{x+y}{2} + 1$.
On a donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\dfrac{1+y}{2x^2} + \dfrac{1}{2y} + \dfrac{1}{2}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{1+x}{2y^2} + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2}$;
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \dfrac{1+y}{x^3}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \dfrac{1+x}{y^3}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{2y^2}$.
2. Mettons la première dérivée partielle au même dénominateur : $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x^2 y + x^2 - y - y^2}{2x^2 y}$, ce qui s'annule si $x^2 y + x^2 = y + y^2$, soit $x^2(1 + y) = y(1 + y)$. Comme $y > 0$, $1 + y$ ne risque pas de s'annuler, et on doit donc avoir $x^2 = y$. Symétriquement, l'annulation de la deuxième dérivée

partielle donne comme condition $x = y^2$. On a donc un point critique si $x = y = 1$ (puisque par exemple $y^4 = y$ avec $y > 0$). Pour le fait que ce point critique est bien un extremum, si on ne veut pas utiliser le résultat complémentaire vu dans une feuille d'exos, on se reporte à la dernière question. Sinon, on calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 2$, et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = -1$. Comme $2 \times 2 - (-1)^2 = 3 > 0$, et que $2 > 0$, le point critique est un minimum local.

3. C'est du calcul bête : $f_1(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2x}$, donc $1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\dfrac{x}{y}\right) = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2x} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{1}{2y} + \dfrac{x}{2y} + \dfrac{y}{2x} = g(x,y)$.
4. La fonction f_1 ayant pour minimum 1 (atteint en 1), $1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\dfrac{x}{y}\right) \geqslant 4$. Or, $g(1,1) = \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = 4$, qui est donc un minimum global pour la fonction.

Problème 2 (EMLyon 09, exercice 3)

Partie I : tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue.

1. La variable T suit une loi géométrique de paramètre, donc $P(T = k) = p(1-p)^{k-1}$; $E(T) = \dfrac{1}{p}$ et $V(T) = \dfrac{q}{p^2}$.
2. Il suffit de constater que $U = T - 1$ (puisqu'on s'arrête à la première boule noire, on a tiré une boule de moins que le nombre total de boules tirées). La variable U admet donc une espérance et une variance, et $E(U) = \dfrac{1}{p} - 1$; $V(U) = V(T) = \dfrac{q}{p^2}$.

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues.

1. (a) Pour avoir $X = k$, il y a deux possibilités incompatibles : soit on tire $k-1$ boules blanches, puis une boule noire (probabilité $p^{k-1}q$, soit on tire $k-1$ boules noires puis une boule blanche (proba $q^{k-1}p$), donc $P(X = k) = p^{k-1}q + q^{k-1}p$.

   (b) Calculons donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} pq^{k-1} + qp^{k-1} = p\sum_{k=1}^{+\infty} q^k + p\sum_{k=1}^{+\infty} q^k = p\left(\frac{1}{1-q} - 1\right) + q\left(\frac{1}{1-p} - 1\right) = \frac{p}{p} - p + \frac{q}{q} - q = 2 - 1 = 1$.

   (c) Encore un petit calcul : l'espérance existe puisque le calcul fait apparaitre deux séries géométriques dérivées, et $\displaystyle E(X) = p\sum_{k=2}^{+\infty} kq^{k-1} + q\sum_{k=2}^{+\infty} kp^{k-1} = p\left(\frac{1}{(1-q)^2} - 1\right) + q\left(\frac{1}{(1-p)^2} - 1\right) = \frac{p}{p^2} - p + \frac{q}{q^2} - 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$.
2. (a) Pour $(X = 2) \cap (Y = 1)$, il y a deux possibilités : il faut avoir tiré une boule blanche et une boule noire, mais peu importe l'ordre. On a donc $P((X = 2) \cap (Y = 1)) = pq + qp = 2pq$. Par contre, pour $k \geqslant 3$, si $X = k$ et $Y = 1$ sont vérifiés, cela signifie qu'on a tiré la boule blanche au tirage k (sinon on aurait tiré une noire et une boule blanche avant le tirage k) et uniquement des boules noires avant, d'où $P((X = k) \cap (Y = 1)) = q^{k-1}p$.

   (b) Les évènements $(X = k)$ formant un système complet d'évènements, on peut appliquer la formule des probabilités totales : $\displaystyle P(Y = 1) = \sum_{k=2}^{+\infty} P((X = k) \cap (Y = 1)) = 2qp +$

$$p\sum_{k=3}^{+\infty} q^{k-1} = pq+p\sum_{k=2}^{+\infty} q^{k-1} = pq+p\left(\frac{1}{1-q}-1\right) = pq+1-p = p(1-p)+1-p = 1-p^2.$$

(c) Calculer $P(Y=k)$ est plus simple si $k \geqslant 2$, puisque le seul tirage possible consiste à tirer d'abord les k boules blanches, puis une boule noire, donc $P(Y=k) = p^k q$.

3. La variable Z est définie de façon similaire à Y, mais avec le rôle de p et de q inversé, donc $P(Z=1) = 1-q^2$; $P(Z=k) = q^k p$, et $E(Z) = \frac{1}{p}(1-q-q^2)$.

4. En effet, si on tire d'abord une boule blanche, on aura nécessairement $Z=1$, donc $YZ = Y = X-1$, puisque dans ce cas on ne tire qu'une boule noire et donc $X-1$ boules blanches. De même, si on commence par une boule noire, $Y=1$, et $YZ = Z = X-1$. Les variables YZ et $X-1$ prennent donc toujours la même valeur.

Problème 3 (EMLyon 08, exercice 1)

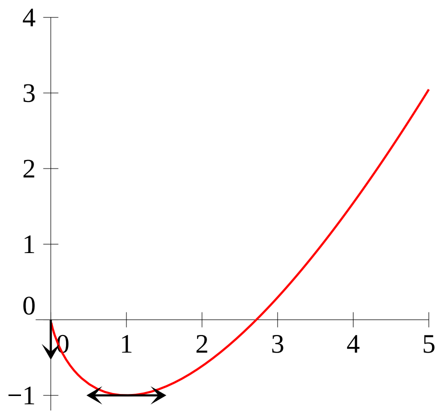
Partie I : Étude d'une fonction.

1. En effet, $\lim\limits_{t\to 0} t\ln t = 0$, donc $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$. Comme f est par ailleurs bien sûr C^∞ sur $]0;+\infty[$, elle est continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Cf plus haut pour le caractère C^1 ; $f'(t) = \ln t$ (résultat classique...).
3. On a $f(t) = t(\ln t - 1)$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$.
4. La fonction f est décroissante sur $[0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$, admettant un minumum en $t=1$ de valeur $f(1) = -1$.
5. En effet, $f''(t) = \frac{1}{t} > 0$ sur $]0;+\infty[$, donc f est convexe.
6. (a) Comme $\lim\limits_{t\to 0} f'(t) = -\infty$, d'après le théorème de prolongement C^1, f admet une demi-tangente verticale en 0.

   (b) Il faut résoudre l'équation $f(t) = 0$, ce qui en reprenant la forme factorisée donne $t=0$ ou $\ln t = 1$, soit $t=0$ ou $t=e$.

   (c) Comme $\frac{f(t)}{t} = \ln t - 1$, qui a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, la courbe admet une branche parabolique de direction (Oy) en $+\infty$.

   (d) Voilà une allure de la courbe :



Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

1. La fonction G est dérivable de dérivée $G'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1))$ par définition de l'intégrale (on peut dire que $G(x) = F(x+1) - F(x-1)$, qui est effetivement définie et dérivable sur $]1; +\infty[$). Comme f est elle-même dérivable de dérivée $t \mapsto \ln t$, la dérivée seconde de G en découle.
2. (a) Au facteur $\frac{1}{2}$ près, $G''(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$, avec $x = 1 > x - 1 > 0$, donc $\frac{x+1}{x-1} > 1$. La dérivée seconde de G étant donc strictement positive, G' est strictement croissante.
   (b) Calculons : $G'(2) = \frac{1}{2}(f(3) - f(1)) = \frac{1}{2}(3\ln 3 - 3 + 1) = \frac{3}{2}\ln 3 - 1 > 0$.
   (c) La fonction G' est strictement croissante, a pour limite $f(2) - f(0) = f(2) < 0$ en 0 (puisqu'on a vu que la courbe de f ne recoupait l'axe des abscisses que pour $x = e > 2$), et prend des valeurs strictement positives d'après la question précédente. D'après le théorème des valeurs intérmédiaires, il existe donc un réel $\alpha \in]0; 2[$ tel que $G'(\alpha) = 0$. La fonction étant par ailleurs strictement croissante, donc bijective, ce réel est nécessairement unique.

Partie III : Étude d'une fonction de deux variables réelles

1. Calculons donc : $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = -2y\ln(x+1) + 2\ln(x+1)f(x+1) - 2y\ln(x-1) + 2\ln(x-1)f(x-1)$; $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = 2y - 2f(x+1) + 2y - 2f(x-1) = 4y - 2(f(x+1) + f(x-1))$.
2. On a $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\alpha, f(\alpha+1)) = -2f(\alpha+1)\ln(\alpha+1) + 2\ln(\alpha+1)f(\alpha+1) - 2f(\alpha+1)\ln(\alpha-1) + 2\ln(\alpha-1)f(\alpha-1)$. Or, $G'(\alpha) = 0$ donc $f(\alpha+1) = f(\alpha-1)$ et tout s'annule. Par ailleurs, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(\alpha, f(\alpha+1)) = 4f(\alpha+1) - 2(f(\alpha+1) + f(\alpha-1)) = 0$. Le point est donc bien un point critique.
3. Comme $\Phi(\alpha, f(\alpha+1)) = (f(\alpha+1) - f(\alpha+1))^2 + (f(\alpha+1) - f(\alpha-1))^2 = 0$, ce point critique est un minimum global (la fonction Φ ne prend que des valeurs positives, c'est une somme de deux carrés).