Exercices et problèmes de révision pour le Concours Blanc

ECE3 Lycée Carnot

16 avril 2010

Exercice 1

Factoriser les expressions suivantes $P(x) = 2x^2 - 4x^2 - 22x + 24$ et $Q(x) = e^{3x} + \frac{7}{12}e^{2x} - \frac{7}{12}x - \frac{1}{6}$.

Exercice 2

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3 + 2u_n}{u_n + 4}$.

1. Montrer que (u_n) est bien définie et à valeurs strictement positives.
2. Montrer que $u_{n+1} = 1 \Leftrightarrow u_n = 1$ et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 1$.
3. On pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique, en déduire son expression puis celle de (u_n).

Exercice 3

Résoudre le système suivant : $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ 7x & + & 3y & - & 5z & = & 2 \end{array}\right.$

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I$. Vérifier que $B^2 = 3B$ puis prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = 2^n I + \dfrac{5^n - 2^n}{3} B$. En déduire la valeur de A^4.

Exercice 5

Une urne contient cinq boules noires numérotées de 1 à 5, trois boules vertes numérotées de 1 à 3 et deux boules blanches numérotées 1 et 2. On tire trois boules dans l'urne successivements sans remise.

- Combien y a-t-il de tirages possibles ?
- Combien de tirages avec trois boules de la même couleur ?
- Combien de tirages avec uniquement des numéros strictement plus petits que 3 ?
- Combien de tirages avec un numéro apparaissant deux fois (exactement) ?
- Combien de tirages avec une boule de chaque couleur ?

Mêmes questions si on effectue désormais un tirage de trois boules simultané.

Exercice 6

Soit $n \geqslant 1$, et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$.

1. Montrer que la fonction f_n s'annule une fois dans l'intervalle $[0;1]$. On note a_n cette valeur.
2. Déterminer la monotonie de la suite a_n et en déduire sa convergence.

3. Montrer que $\forall n \geqslant 1,\ a_n - \dfrac{1}{2} = \dfrac{a_n^{n+1}}{2}$. Déterminer la limite de (a_n).

Exercice 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe deux suites (u_n) et (v_n) telles que $A^n = u_n A + v_n I$ et déterminer des relations de récurrence pour ces deux suites.
2. On pose $a_n = 2u_n + v_n$ et $b_n = u_n - v_n$. Déterminer a_{n+1} en fonction de a_n et b_{n+1} en fonction de b_n, en déduire la valeur de A^n.

Exercice 8

Un restaurant propose 3 menus $M1$, $M2$ et $M3$ et on suppose que chaque client choisit son menu au hasard et indépendemment des autres clients. Un jour donné, n clients se présentent. On note $X1$, $X2$ et $X3$ les variables aléatoires du nombre de clients choisissant les menus $M1$, $M2$ et $M3$.

1. Quelle est la loi de $X1$? En déduire celles de $X2$ et $X3$.
2. Quelle est la loi de $n - X3$?
3. Que vaut $X1 + X2 + X3$? En déduire la loi de $X1 + X2$.
4. (a) Quelle est la probabilité que tous les clients choisissent le même menu ?
   (b) Quelle est celle que le restaurateur doivent préparer au moins deux menus ?
   (c) Quelle est enfin la probabilité que les trois menus soient demandés.

Exercice 9

Étudier le plus complètement possible (notamment branches infinies et convexité) la fonction $f : x \mapsto \ln(e^{2x} + 3e^x + 2)$ et la fonction $g : x \mapsto x + \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$.

Exercice 10

Un jeu video est constitué d'une infinité de niveaux, numérotés 1, 2 etc. Un joueur a une probabilité $\dfrac{1}{n}$ de passer le niveau numéroté n s'il a réussi à passer les niveaux précédents. On note X la nombre de niveaux que ce joueur réussit à passer avant de perdre lors d'une partie. Préciser $X(\Omega)$, puis déterminer la loi de X, et calculer son espérance et sa variance (pour ces derniers calculs, il pourra être plus facile de calculer $E(X+1)$ et $E(X^2 - 1)$ plutôt que $E(X)$ et $E(X^2)$).

Problème 1 (Ecricome 07, exercice 1)

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par $f_a(t) = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{a^2}{t}\right)$, ainsi que la suite (u_n) de nombres réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f_a(u_n)$.

1. Étude des variations de la fonction f_a

1. Déterminer la limite de $f_a(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et donner la position de la courbe représentative de f_a par rapport à cette asymptote.
2. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.

3. Donner l'expression de la fonction dérivée de f_a sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser le tableau de variation de f_a.
4. En déduire que $\forall t > 0,\ f_a(t) \geqslant a$.

2. Étude de la convergence de la suite (u_n)

1. Que dire de la suite (u_n) dans le cas particulier où $u_0 = a$?
2. Dans la suite on revient au cas général $u_0 > 0$. Démontrer que $\forall t > a,\ 0 < f_a'(t) < \dfrac{1}{2}$.
3. Montrer que, pour tout entier n non nul, $u_n \geqslant a$.
4. Prouver alors que pour tout entier n non nul $0 \leqslant u_{n+1} - a \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - a)$,

   puis que $|u_n - a| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$.
5. En déduire la convergence de la suite (u_n) et indiquer sa limite.
6. En utilisant ce qui précède, écrire un programme Pascal permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite (u_n) de premier terme 1 et convergeant vers $\sqrt{2}$.

3. Recherche d'extremum d'une fonction à deux variables

On considère sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction g définie par $g(x,y) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)(1+x)(1+y)$.

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que g admet un extremum local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
3. Vérifier que $g(x,y) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\dfrac{x}{y}\right)$.
4. En déduire que l'extremum local est un extrememum global de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Problème 2 (EMLyon 09, exercice 3)

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q. Ainsi, on a $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $p + q = 1$.

Partie I : tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue.

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire. On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de T. Pour tout entier $k \geqslant 1$, donner $P(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T.
2. En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$.

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues.

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués, Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues et Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues. Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'évènement $(Y = 1) \cup (Z = 1)$ est égale à 1. Pour tout entier naturel non nul, on note B_i l'évènement « la i-ème boule tirée est blanche » et N_i l'évènement « la i-ème boule tirée est noire ».

1. (a) Montrer, pour tout entier $k \geqslant 2$, $P(X)k = qp^{k-1} + pq^{k-1}$.

(b) Vérifier $\sum_{k=2}^{+\infty} P(X=k)=1$.

(c) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $E(X)=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+1$.

2. (a) Pour tout entier $k \geqslant 2$, déterminer $P((X=k)\cap(Y=1))$ (on distinguera les cas $k=2$ et $k \geqslant 3$).

   (b) En déduire $P(Y=1)=q(1+p)$.

   (c) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

   On admet que l'espérance de Y existe et que $E(Y)=\frac{1}{q}(1-p+p^2)$.

3. Donner la loi de Z et son espérance.

4. Montrer que les variables YZ et $X-1$ sont égales.

Problème 3 (EMLyon 08, exercice 1)

On admet l'encadrement suivant : $2,7<e<2,8$.

Partie I : Étude d'une fonction.

On considère l'application $f:[0;+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $f(t)=\begin{cases} t\ln t-t & \text{si} \quad t\neq 0\\ 0 & \text{si} \quad t=0\end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
2. Justifier que f est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t\in]0;+\infty[$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Montrer que f est convexe sur $]0;+\infty[$.
6. On note Γ la courbe représentative de f dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   (a) Montrer que Γ admet une demi-tangente en O.
   (b) Déterminer les points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses.
   (c) Préciser la nature de la branche infinie de Γ.
   (d) Tracer Γ.

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application $G:]1;+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $G(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$.

1. Montrer que G est de classe C^2 sur $]1;+\infty[$ et que $G'(x)=\frac{1}{2}(f(x+1)-f(x-1))$ et $G''(x)=\frac{1}{2}(\ln(x+1)-\ln(x-1))$. À cet effet, on pourra faire intervenir une primitive F de f sans chercher à calculer F.
2. (a) Montrer que G' est strictement croissante sur $]1;+\infty[$.
   (b) Vérifier $G'(2)>0$.
   (c) Établir que l'équation $G'(x)=0$, d'inconnue $x\in]1;+\infty[$, admet une solution unique notée α, et que $\alpha<2$.

Partie III : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère l'application $\Phi:]1;+\infty[^2\to\mathbb{R}$ définie par
$\Phi(x,y)=(y-f(x+1))^2+(y-f(x-1))^2$, où l'application f est définie dans la partie I.

1. Calculer les dérivées partielles premières de Φ sur $]1;+\infty[^2$.
2. Vérifier que $(\alpha,f(\alpha+1))$ est un point critique de Φ, où α est définie en II 2.*c*.
3. Est-ce que Φ admet un extremum local en $(\alpha,f(\alpha+1))$?