# Chapitre n° 16 : Intégration

ECE3 Lycée Carnot

24 avril 2010

## Introduction

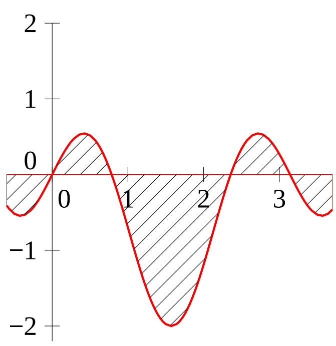
Nous aurons cet année un objectif assez simple en ce qui concerne l'intégration : apprendre à faire du calcul ! Ceci dit, l'intégration est loin de se résumer à un simple outil brutal (mais relativement efficace), il s'agit en fait d'une théorie complète dont le but est tout simplement de calculer des aires. Tout cela est donc très géométrique et visuel, même si en pratique on se contente souvent de passer par le biais des primitives que vous avez déjà du croiser l'an dernier. Nous allons essayer dans ce cours d'aborder les choses par le biais de ces calculs d'aire, et nous reviendrons sur cette notion en fin de chapitre pour expliquer la notation utilisée quand on fait du calcul intégral.

## 1 Construction

Dans tout le chapitre, nous nous placerons dans le cadre suivant : la fonction $f$ que l'on cherche à intégrer est toujours **continue** (éventuellement continue par morceaux, mais le cas ne sera pas spécifiquement traité dans le cours, et simplement déduit du cas précédent en cas de besoin pour les exercices). De plus, on ne s'intéressera qu'à l'intégration sur un segment $[a;b]$ (l'an prochain, vous compliquerez un peu tout ça). Le principe de base est le suivant : les seules aires que l'on sait calculer facilement, ce sont des aires de rectangle (longueur fois largeur, ça va). Toute autre forme géométrique, même élémentaire, a une aire complexe (pensez à la forme pour un disque, qui fait sortir d'on ne sait trop où la fameuse constante $\pi$).

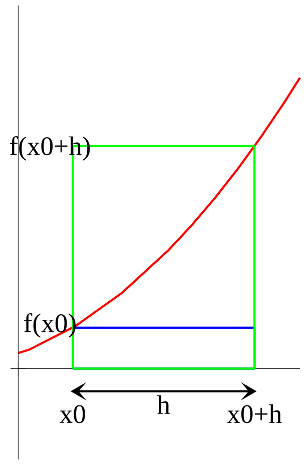
### 1.1 Aire sous une courbe

Soit donc $f$ une fonction définie et continue sur un segment $[a;b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. On s'intéresse à la fonction $\mathcal{A}$ définie sur $[a;b]$ de la façon suivante : $\mathcal{A}(x_0)$ est l'aire de la portion de plan délimitée par les droites d'équation $x = a$ ; $x = x_0$ ; $y = 0$ et par la courbe $\mathcal{C}_f$. L'aire sera comptée positivement lorsque $\mathcal{C}_f$ se trouve au-dessus de l'axe des abscisses, négativement dans le cas contraire.




**Proposition 1.** La fonction $\mathcal{A}$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée la fonction $f$.

*Démonstration.* Calculons le taux d'accroissement de $\mathcal{A}$ entre $x_0$ et $x_0+h$ (où $h$ est un réel positif). Par définition, la quantité $\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x)$ est l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=x_0$ et $x=x_0+h$. Supposons pour la clarté du raisonnement la fonction croissante aux alentours de $x_0$ (le cas général n'est pas vraiment plus compliqué), on a donc une figure qui ressemble à ceci :




On peut encadrer l'aire qui nous intéresse par celle des deux rectangles de largeur $h$ dessinés sur la figure, l'un ayant pour hauteur $f(x_0)$ et l'autre $f(x_0+h)$. On a donc $hf(x_0) \leqslant \mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0) \leqslant hf(x_0+h)$, ou encore $f(x_0) \leqslant \dfrac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$. Mais on obtient alors, en faisant tendre $h$ vers 0 et en utilisant le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\mathcal{A}(x_0+h)-\mathcal{A}(x_0)}{h} = f(x_0)$ (notez qu'on a besoin pour cela de la continuité de la fonction $f$). En procédant de la même manière pour $h<0$, on montre la dérivabilité de la fonction $\mathcal{A}$, et on a bien $\mathcal{A}'(x_0)=f(x_0)$. □

## 1.2 Primitives

Le calcul du paragraphe précédent conduit naturellement à l'étude de la notion suivante :

**Définition 1.** Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$. On dit que $F$ est une **primitive** de $f$ sur $I$ si la fonction $F$ est dérivable sur $I$ et vérifie $F'=f$.

**Exemple :** Sur n'importe quel intervalle, la fonction $x\mapsto 1$ a pour primitive $x\mapsto x$, mais aussi $x\mapsto x+2$ ; $x\mapsto x-\sqrt{127}$ etc. Sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$, la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ a pour primitive $x\mapsto \ln(x)$.

**Théorème 1.** Toute fonction continue sur un segment y admet une primitive.

En effet, la fonction « aire sous la courbe » définie au paragraphe précédent est une primitive de $f$. Mais attention, cette primitive n'est pas la seule, loin de là !

**Proposition 2.** Si $F$ est une primitive de $f$ sur l'intervalle $I$, la fonction $x\mapsto F(x)+k$ ($k\in\mathbb{R}$) est également une primitive de $f$. Réciproquement, si $G$ est une primitive de $f$, la fonction $G-F$ est constante (autrement dit, il existe une constante $k$ pour laquelle $G=F+k$).

*Démonstration.* C'est essentiellement évident : si $F'=f$, alors $(F+k)'=f$ donc $F+k$ est une primitive de $f$. Et si $F$ et $G$ sont deux primitives de $f$, on a $(G-F)'=f-f=0$, donc $G-F$ est une fonction constante. □

**Proposition 3.** Soit $f$ continue sur $I$, $x_0\in I$ et $y_0\in\mathbb{R}$ alors il existe une unique primitive $F_0$ de $f$ sur $I$ telle que $F(x_0)=y_0$.

*Démonstration.* Puisque nous savons qu'il en existe une, notons $F$ une primitive de $f$ sur $I$ et posons $k = y_0 - F(x_0)$. on a alors $(F+k)(x_0) = y_0$, donc $F_0 = F + k$ est une primitive qui convient. De plus, elle est unique, car une autre solution différerait de $F_0$ par une constante nécessairement nulle puisque les deux fonctions prendraient la même valeur en $x_0$. □

**Exemple :** La fonction ln a été historiquement définie comme étant **la** primitive de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant pour $x = 1$.
La primitive de $x \mapsto 2x$ valant $-3$ en $x = 2$ est la fonction $x \mapsto x^2 - 7$.

*Remarque* 1. Si l'on reprend l'interprétation géométrique du premier paragraphe, on peut obtenir d'autres primitives de $f$ en décalant l'origine du calcul d'aire, mais on n'obtiendra pas nécessairement toutes les primitives ainsi.

Pour finir ce paragraphe, voici l'indispensable tableau récapitulatif des primitives usuelles à connaitre par coeur (et qui va fortement vous rappeler un autre tableau, celui des dérivées usuelles). Attention, toutes les primitives sont données **à une constante près**, en cohérence avec les remarques faites plus haut. Pas plus de commentaires ou de preuve pour ce tableau, il suffit de retourner le tableau des dérivées usuelles :

| $Fonction$ | $Primitive$ | $Intervalle$ | $Fonction$ | $Primitive$ |
|---|---|---|---|---|
| $a(constante)$ | $ax$ | $\mathbb{R}$ | $af$ | $aF$ |
| $x^n (n \neq -1)$ | $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ | $\mathbb{R}$ | $f + g$ | $F + G$ |
| $x^a (a \neq -1)$ | $\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$ | $\mathbb{R}^{+*}$ | $u' f(u)$ | $F(u)$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $\ln(x)$ | $\mathbb{R}^{+*}$ | $f' f$ | $\dfrac{f^2}{2}$ |
| $\ln(x)$ | $x \ln(x) - x$ | $\mathbb{R}^{+*}$ | $\dfrac{f'}{f}$ | $\ln \lvert f \rvert$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $\mathbb{R}$ | $f' e^f$ | $e^f$ |

**Exemple :** Une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ est $x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + \ln(x)$. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ est $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

### 1.3 Définition de l'intégrale

**Définition 2.** Soit $f$ une fonction continue sur un segment $[a; b]$, alors le nombre $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive $F$ de $f$. On le note $\int_a^b f(t)dt$, et il s'appelle **intégrale de** $a$ **à** $b$ **de la fonction** $f$.

*Démonstration.* On a vu que deux primitives $F$ et $G$ de $f$ différaient d'une constante $k$. Mais si $G = F + k$, on a $G(b) - G(a) = F(b) + k - F(a) - k = F(b) - F(a)$, donc la définition ne dépend effectivement pas de la primitive choisie. □

*Remarque* 2. On verra dans les compléments une façon géométrique d'obtenir la définition de l'intégrale qui justifie la notation.

*Remarque* 3. La variable $t$ apparaissant à l'intérieur de l'intégrale est une variable muette (comme le $k$ pour une somme par exemple). On peut très bien la remplacer par toute autre variable, à condition de remplacer également de $dt$, que nous voyons pour l'instant comme une façon d'indiquer la variable dans l'intégrale : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\mu)d\mu$.

**Définition 3.** On utilisera la notation suivante : pour toute fonction $F$ définie sur un intervalle $[a; b]$, on note $[F]_a^b = F(b) - F(a)$.

**Exemple :** Ainsi, on notera par exemple $\displaystyle\int_{-2}^{3} t dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-2}^{3} = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$.

**Proposition 4.** Soit $f$ une fonction continue sur un segment $[a;b]$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de $f$ s'annulant en $a$.

*Démonstration.* En effet, soit $F$ une primitive quelconque de $f$, on a $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. La fonction qu'on vient de définir diffère de $F$ par une constante, c'est donc également une primitive de $f$. De plus sa valeur en $a$ est $F(a) - F(a) = 0$. Notons au passage qu'on a donc $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$. □

# 2 Propriétés de l'intégrale

## 2.1 Propriétés élémentaires

**Proposition 5.** (relation de Chasles) Soient $a < b < c$ trois réels et $f$ une fonction continue sur $[a;c]$, alors $\displaystyle\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$.

*Démonstration.* Soit $F$ une primitive quelconque de $f$, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(t)dt$. □

**Exemple :** Pour calculer certaines intégrales faisant intervenir une valeur absolue, un découpage peut être utile : $\displaystyle\int_0^4 |x-2|\ dx = \int_0^2 2 - x\ dx + \int_2^4 x - 2\ dx = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^4 = 2 - 0 + 0 - (-2) = 4$.

**Proposition 6.** (linéarité de l'intégrale) Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un segment $[a;b]$, et $\alpha$, $\beta$ deux réels, alors $\displaystyle\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)\ dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)\ dt$.

*Démonstration.* C'est une conséquence évidente de la linéarité de la « primitivisation ». □

## 2.2 Intégration et inégalité

**Proposition 7.** Soit $f$ une fonction continue et positive sur un segment $[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

*Démonstration.* La fonction $f$ étant positive, $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, qui en est une primitive, est une fonction croissante. Comme $F(a) = 0$, on a donc $F(b) \geqslant 0$, et $\displaystyle\int_a^b f(t) = F(b) - F(a) = F(b) \geqslant 0$. □

*Remarque* 4. On est toutefois parfaitement autorisé à écrire une intégrale dont les bornes sont dans le « mauvais sens ». Auquel cas le signe en est changé : $\displaystyle\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$. La proposition précédente ne s'applique donc que si $a \leqslant b$ (ce qui est le cas quand on parle du segment $[a;b]$, mais on a vite fait d'oublier cette condition).

*Remarque* 5. On peut affiner le résultat en remarquant, que si $f$ est continue et positive sur $[a;b]$, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

**Proposition 8.** Si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur un même segment $[a;b]$ et $f \leqslant g$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$.

*Démonstration.* Si $f \leqslant g$, la fonction $g - f$ est positive, donc $\int_a^b d(t) - f(t)\ dt \geqslant 0$, ce qui donne le résultat en utilisant la linéarité de l'intégrale. □

**Exemple :** un cas particulier extrêmement fréquent est l'utilisation d'une fonction constante pour majorer (ou minorer) une intégrale. Si on a $m \leqslant f \leqslant M$ sur un segment $[a;b]$, alors $\int_a^b mdt \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b Mdt$, soit $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$.

**Exemple :** Un exemple classique d'utilisation d'encadrement est la détermination de limites de suites d'intégrales. Posons ainsi $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^4}dt$ et cherchons calculer la limite de la suite $(I_n)$. On ne cherche surtout pas à calculer la valeur de $I_n$ (on aurait bien du mal à y parvenir, de toute façon), mais on commence par remarquer que, pour toute valeur de $n$, la fonction qu'on intègre est positive, donc la suite $(I_n)$ est positive. De plus, en remarquant que $\forall t \in [0;1]$, on a $\frac{1}{1+t^4} \leqslant 1$, on en déduit que $I_n \leqslant \int_0^1 t^n\ dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, donc par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

**Définition 4.** Soit $f$ une fonction continue sur un segment $[a;b]$. On appelle **valeur moyenne de** $f$ la quantité $\frac{\int_a^b f(t)dt}{b-a}$.

**Proposition 9.** Soit $f$ une fonction continue sur un segment $[a;b]$, alors on a $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$.

*Démonstration.* On a $f \leqslant |f|$ donc en utilisant la proposition précédente $\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$. Mais de même $-f \leqslant |f|$ donc $-\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$, donc on a bien l'égalité voulue (si $x \leqslant y$ et $-x \leqslant y$, alors $|x| \leqslant y$). □

# 3 Méthodes de calcul

## 3.1 Intégration directe

La méthode la plus basique mais la plus efficace quand la fonction a le bon goût de ne pas être trop compliquée est d'en trouver une primitive, il ne reste plus ensuite qu'à calculer.

**Exemple :** Si $f$ est un polynome, on s'en sort toujours sans difficulté : $\int_{-1}^3 x^2 - 2x + 3\ dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_{-1}^3 = 9 - 9 + 9 - (-\frac{1}{3} - 1 - 3) = \frac{14}{3}$.

**Exemple :** Notre tableau de primitives usuelles est évidemment d'une grande utilité. Par exemple $\int_0^1 \frac{1}{x+3} = [\ln(x+3)]_0^1 = \ln 4 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}$.

### 3.2 Intégration par parties

Le principe est très simple : utiliser la formule de dérivation d'un produit de façon légèrement détournée. On sait bien entendu que, si $u$ et $v$ sont deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$, la dérivée du produit $uv$ est $u'v + uv'$. On a donc, en utilisant les résultats vus à la partie précédente, $\int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\ dt = [uv(t)]_a^b$. On utilise ce résultat sous une forme légèrement différente :

**Proposition 10.** Soient $u$ et $v$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a;b]$, alors $\int_a^b u(t)v'(t) = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)$.

*Démonstration.* La démonstration a été, une fois n'est pas coutume, faite avant d'énoncer le théorème. □

*Remarque* 6. Cette méthode de calcul est très utile pour calculer des intégrales faisant intervenir des produits de fonctions usuelles, dont on a souvent du mal à déterminer directement une primitive. Une difficulté peut provenir du choix, parmi les deux fonctions présentes, de celle qui jouera le rôle de $u$ et de celle qui jouera le rôle de $v'$. Pensez que le but est de faire apparaitre dans le membre de droite une intégrale plus facile à calculer que celle d'origine (sinon on n'a pas vraiment avancé), et que dans ce membre de droite, on dérive $u$ et on « primitive » $v'$. On choisira quand c'est possible une fonction $v'$ facile à intégrer (le cas idéal étant l'exponentielle ou le logarithme) et pour $u$ une fonction qui se simplifie quand on la dérive, souvent une puissance de $t$. Première exemple super classique : $\int_0^5 te^t\ dt$. Le $t$ gêne et le $e^t$ s'intègre bien, on va donc faire une intégration par parties en posant $u(t) = t$ et $v'(t) = e^t$. On a donc $\int_0^5 te^t\ dt = [te^t]_0^5 - \int_0^5 e^t\ dt = 5e^5 - [e^t]_0^5 = 5e^5 - e^5 + 1 = 4e^5 + 1$. Dans un premier temps, je vous conseille de bien poser tous vos calculs, en précisant ce que valent les fonctions $u$, $v'$, $u'$ et $v$, puis avec un peu d'habitude vous pourrez rédiger plus rapidement.

*Remarque* 7. Il peut être astucieux de recourir à une intégration par parties dans le cas où il n'y a pas de produit visible en prenant 1 comme deuxième facteur du produit. C'est ainsi que l'on trouve le plus naturellement la formule de la primitive de ln qui s'annule en 1. On sait que cette primitive peut s'exprimer comme $\int_1^x \ln(t)\ dt$. Pour calculer cette intégrale, on va faire une intégration par parties en posant $v'(t) = 1$ et $u(t) = \ln t$. On a donc $v(t) = t$ et $u'(t) = \frac{1}{t}$, donc $\int_1^x \ln(t)\ dt = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x 1\ dt = x\ln x - x + 1$.

*Remarque* 8. Il est souvent utile de procéder à plusieurs intégrations par parties successives, notamment quand on cherche à faire baisser le degré d'une puissance de $t$ dans l'intégrale, et on est même parfois amené à raisonner par récurrence.

**Exemple :** On cherche à calculer $I_n = \int_1^e t^n \ln t\ dt$. On peut calculer directement $I_0 = \int_1^e \ln t\ dt = [t\ln t - t]_1^e = e - e - 0 + 1 = 1$. Pour le cas général, on s'en sort en fait par une simple intégration par parties : $I_n = \int_1^e t^n \ln t\ dt = [\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t]_1^e - \int_1^e \frac{t^n}{n+1}\ dt = \frac{e^{n+1}}{n+1} - [\frac{1}{(n+1)^2}t^{n+1}]_1^e = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{ne^{n+1}+1}{(n+1)^2}$.

### 3.3 Changement de variable

L'idée est cette fois-ci d'utiliser la formule de dérivation d'une fonction composée : $(F \circ u)' = u' \times f \circ u$ (où $F$ désigne une primitive de la fonction $f$). Le théorème suivant découle facilement de cette formule :

**Théorème 2.** (changement de variable) Soit $u$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a;b]$ et $f$ une fonction continue sur le segment $[u(a);u(b)]$, alors on a $\displaystyle\int_a^b u'(t)f(u(t))\ dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(v)\ dv$.

*Démonstration.* En effet, une primitive de $u'f(u)$ est $F(u)$, où $F$ est une primitive de $f$. Le membre de gauche vaut donc $F(u(b)) - F(u(a))$, ce qui est bien égal au membre de droite. □

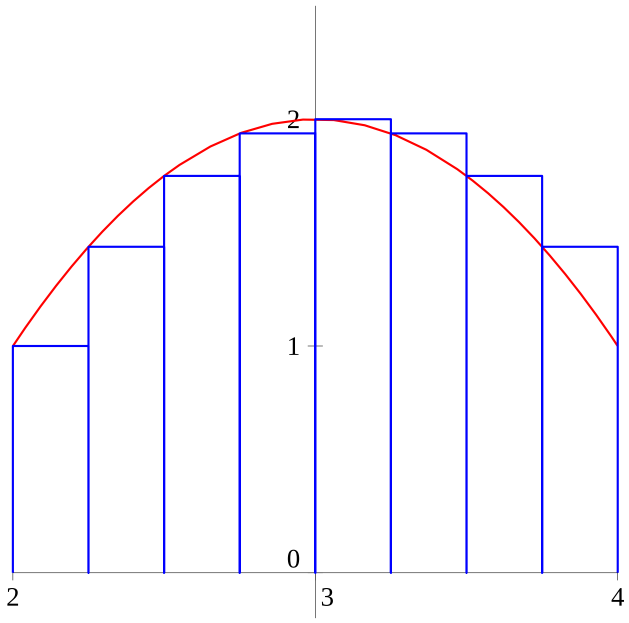
Cette formule est naturellement utilisée quand on a sous l'intégrale une fonction qui peut sous la forme de la dérivée d'une composée. Mais même dans d'autres cas, on peut tenter de l'utiliser pour simplifier l'intégrale, comme dans le cas d'une intégration par parties. En pratique, pas vraiment besoin de retenir la formule, il faut savoir l'appliquer, et surtout comprendre tout ce qu'il y a à modifier quand on fait un changement de variable. Il faut bien sûr changer la variable, mais aussi les bornes de l'intégrale, et surtout le fameux $dt$, en suivant la règle suivante : $d(u(t)) = u'(t)\ dt$. Nous n'avons pas les moyens de bien comprendre cette manipulation, mais cela correspond bien à la formule donnée ci-dessus ($f(u(t))$ est changé en $f(v)$ et $u'(t)\ dt$ en $dv$).
Prenons un exemple avec $I = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{t(\ln t+1)}\ dt$. On va faire le changement de variable $u = \ln t$. On a alors $du = \dfrac{1}{t}\mathrm{d}t$, ce qui permet de se débarasser du $t$ au dénominateur en le faisant passer dans le $du$. Il reste encore à changer les bornes, qui deviennent 0 et 1, et on obtient $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{u+1}\ du = [\ln(u+1)]_0^1 = \ln 2$.

**Exemple :** On cherche à calculer $\displaystyle\int_1^2 t\sqrt{2t-1}\ dt$. Le terme $\sqrt{2t-1}$ n'étant pas pratique à manipuler, on va faire le changement de variable $v = 2t-1$, autrement dit $v = u(t)$, où $u$ est la fonction $t \mapsto 2t-1$. Il faut alors changer également le $dt$ en calculant $dv = u'(t)dt = 2dt$, donc $dt = \dfrac{dv}{2}$. Il faudra aussi faire quelque chose du $t$ qui traine à côté de la racine : comme $u = 2t-1$, on a $t = \dfrac{u+1}{2}$. Enfin, il faut changer les bornes de l'intégrale par $u(1) = 1$ et $u(2) = 3$. On obtient donc $\displaystyle\int_1^2 t\sqrt{2t-1}\ dt = \int_1^3 \frac{u+1}{4}\sqrt{u}\ du = \frac{1}{4}\int_1^3 u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\ du = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^3 = \frac{1}{10}(3^{\frac{5}{2}}-1) + \frac{1}{6}(3^{\frac{3}{2}}-1)$.

# 4 Compléments

## 4.1 Sommes de Riemann

Le concept de somme de Riemann fait partie d'une construction de l'intégrale légèrement différente de celle que nous avons adoptée (mais qui permet accessoirement de définir l'intégrale de fonctions qui ne sont pas forcément continues). Nous avons défini le concept de primitive pour construire nos intégrales, la primitive pouvant être vue comme une façon de calculer l'aire sous la courbe représentative de $f$ (cf introduction). On peut également pousser plus loin les calculs d'aire en essayant d'approcher le plus possible l'aire de la courbe à l'aide de rectangles. Pour cela, le plus simple est de découper le segment $[a;b]$ en $n$ segments de même largeur, en posant $h = \dfrac{b-a}{n}$, obtenant ainsi $n$ segments de largeur $h$. Sur chacun de ces segments, on va approcher l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ par celle d'un rectangle. Pour la hauteur du rectangle, on fait le choix arbitraire de prendre la valeur de $f$ au point le plus à gauche du segment, autrement dit $f(a)$ pour le premier segment, $f(a+h)$ pour le deuxième, jusqu'à $f(a+(n-1)h)$ pour le dernier (sachant que $b = a+nh$). Cela correspond à la figure suivante :




La somme de Riemann n'est autre que la somme des aires de ces rectangles (qui dépend bien sûr de $n$).

**Définition 5.** On appelle $n$ème somme de Riemann associée à une fonction $f$ continue sur un segment $[a;b]$ le réel

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

Le résultat fondamental sur les sommes de Riemann, que nous nous garderons bien de démontrer, est le suivant :

**Théorème 3.** Si $f$ est continue sur $[a;b]$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f) = \int_a^b f(t)\ dt$.

Autrement dit, les sommes de Riemann sont une bonne façon d'approcher l'aire sous la courbe. On peut même majorer l'écart entre la $n$-ème somme de Riemann et l'intégrale de $f$. C'est d'ailleurs la méthode utilisée pour faire du calcul numérique (et donc approché) d'intégrales, dans votre calculatrice par exemple. Il suffit de prendre $n$ assez grand pour avoir une très bonne valeur approchée de l'intégrale.

*Remarque* 9. Cette façon de voir l'intégrale explique plus ou moins la notation utilisée : l'intégrale est la limite des sommes de Riemann, autrement dit (avec un peu d'imagination), une somme infinie d'aires de rectangles de hauteur $f(t)$ (pour $t$ parcourant $[a;b]$) et de largeur infiniment petite notée $dt$. Le symbole $\int$ n'étant autre qu'un $S$ comme somme, on voit bien l'origine de la notation.

**Exemple :** Appliquons la définition et le théorème à la fonction carré sur l'intervalle $[0;1]$. L'expression de la somme de Riemann se simplifie notablement puisque dans ce cas $\dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1}{n}$ et $a = 0$. On a donc $S_n(f) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{k=n-1} k^2$. Le théorème nous permet d'affirmer que $S_n(f)$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 t^2\ dt = \frac{1}{3}$. Autrement dit, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} k^2 \sim \frac{n^3}{3}$. Ce n'est pas une grande découverte puisqu'on sait calculer exactement cette somme. Par contre, si on fait exactement la même manipulation avec la fonction $x \mapsto x^7$ (par exemple), toujours sur le segment $[0;1]$, on obtient le résultat plus intéressant $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} k^7 \sim \frac{n^8}{8}$.

*Remarque* 10. On peut également utiliser les sommes de Riemann « dans l'autre sens », c'est-à-dire reconnaitre lors de l'étude d'une suite une somme de Riemann pour en déduire sa limite. dans ce cas, la somme de Riemann sera toujours sur l'intervalle $[0;1]$, c'est-à-dire qu'il faut reconnaitre quelque chose du type $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, pour une certaine fonction continue $f$.

## 4.2 Fonctions définies par une intégrale

On en a déjà vu un exemple sans le dire quand on a calculé la primitive du logarithme un peu plus haut : la primitive de $f$ s'annulant en $a$ est bien une fonction définie par une intégrale $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$. Dans le cas du logarithme, on peut en fait expliciter la fonction sous une forme traditionnelle, mais il peut très bien arriver en général qu'on n'ait pas de formule plus simple. Il faut alors étudier la fonction en utilisant les propriétés de l'intégrale. Mais un bon exemple vaudra mieux que de longs discours :

On veut étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} e^{t^2}\,dt$. Il est illusoire de chercher à expliciter la fonction $f$, mais on peut calculer sa dérivée en utilisant les propriétés vues plus haut sur les primitives. On peut écrire $f(x) = g(x^2) - g(x)$, où $g$ est une primitive (quelconque) de la fonction $t \mapsto e^{t^2}$. On peut donc dériver $f$ (en utilisant la dérivation des fonctions composées pour dériver $g(x^2)$) et on obtient $f'(x) = 2xe^{x^4} - e^{x^2}$.
L'étude de la dérivée n'est pas totalement aisée. On peut commencer par remarquer que $f'$ est négative sur $\mathbb{R}^-$, et passer au logarithme quand $x > 0$ : $2xe^{x^4} \geqslant e^{x^2} \Leftrightarrow \ln 2 + \ln x + x^4 \geqslant x^2$. On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction $h$ par $h(x) = \ln 2 + \ln x + x^4 - x^2$ ; cette fonction est dérivable de dérivée $h'(x) = \dfrac{1 + 3x^4 - 2x^2}{x}$. Le numérateur peut s'écrire sous la forme $3X^4 - X + 1$ en posant $X = x^2$, et on constate que ce numérateur est toujours positif (son discriminant est strictement négatif). La fonction $h$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme ses limites respectives en 0 et en $+\infty$ sont $-\infty$ et $+\infty$, elle s'annule pour un seul réel $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Il en est de même pour $f'$, et on en déduit donc que $f$ est décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;+\infty[$. Notons au passage qu'on a manifestement $f(0) = f(1) = 0$ (puisque pour ces deux valeurs on calcule une intégrale sur un intervalle réduit à une seule valeur), ce qui permet d'affirmer que $\alpha \in ]0;1[$. La fonction $f$ prend d'ailleurs des valeurs négatives sur $]0;1[$, puisque les bornes de l'intégrale sont alors ødans le mauvais sens ».
Pour compléter le tableau de variations, on peut calculer les limites en $\pm\infty$ sans grande difficulté, à l'aide d'une minoration pas très subtile de la fonction à intégrer : pour tout réel $t$, on a $e^{t^2} \geqslant 1$, donc $\forall x \notin [0;1]$, $f(x) \geqslant \displaystyle\int_x^{x^2} 1\,dt \geqslant x^2 - x$, ce qui permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Voici le tableau complet obtenu :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |