Un sujet d'annales : HEC 2008 (Problème)

ECE3 Lycée Carnot

10 mai 2010

Dans tout le problème, N désigne un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2, et p un réel fixé de l'intervalle $]0,1[$. On pose : $q = 1 - p$. Soit n un entier naturel quelconque.

Dans une population de N individus, on s'intéresse à la propagation d'un certain virus. Chaque jour, on distingue dans cette population trois catégories d'individus : en premier lieu, les individus sains, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas porteurs du virus, ensuite les individus qui viennent d'être contaminés et qui sont inoffensifs pour les autres, et enfin, les individus contaminés par le virus et qui sont contagieux. Ces trois catégories évoluent jour après jour selon le modèle suivant :

- chaque jour n, chaque individu sain peut être contaminé par n'importe lequel des individus contagieux ce jour avec la même probabilité p, ces contaminations éventuelles étant indépendantes les unes des autres.
- un individu contaminé le jour n devient contagieux le jour $n + 1$.
- chaque individu contagieux le jour n redevient sain le jour $n + 1$.

On note alors X_n le nombre aléatoire d'individus contagieux le jour n. On remarquera que si, pour un certain entier naturel i, on a $X_i = 0$, alors on a aussi $X_{i+1} = 0$.

Partie I. Un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que l'on a : $N = 3$ et $p = \dfrac{1}{3}$. On considère les matrices

$$S = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la matrice R est inversible et calculer son inverse R^{-1}.
2. (a) Calculer le produit matriciel $R^{-1}SR$.

   (b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$ l'expression de la matrice S^n.
3. Soit n un entier fixé de $\mathbb{N}$.

   (a) Déterminer, pour tout entier k, la probabilité conditionnelle de $P_{X_n=0}(X_{n+1} = k)$.

   (b) Déterminer, pour tout entier k, la probabilité conditionnelle de $P_{X_n=3}(X_{n+1} = k)$.

   (c) Vérifier qu'en supposant l'évènement $X_n = 1$ réalisé (respectivement $X_n = 2$ réalisé), la loi de X_{n+1} est la loi binomiale de paramètres $\left(2, \dfrac{1}{3}\right)$ (resp. $\left(1, \dfrac{5}{9}\right)$).

   (d) On note $E_{X_n=i}(X_{n+1})$ l'espérance de la loi obtenue pour la variable X_{n+1} en supposant vérifié l'évènement $X_n = i$. Déterminer les valeurs respectives de $E_{X_n=1}(X_{n+1})$ et $E_{X_n=2}(X_{n+1})$.
4. On suppose, uniquement dans cette question, que X_0 suit la loi binomiale de paramètre $\left(3, \dfrac{1}{3}\right)$.

   (a) Déterminer la loi de X_1 et calculer $E(X_1)$.

(b) Vérifier la formule suivante : $E\left(X_1\right)=\sum_{i=0}^{i=3} E_{X_0=i}(X_1)\times P(X_0=i)$.

5. Pour tout entier naturel n, on définit la matrice $U_n=\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \\ P(X_n=3) \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer une relation entre u_n, v_n, w_n et t_n.

   (b) À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer une matrice $M\in\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que : $U_{n+1}=MU_n$.

   (c) Exprimer M en fonction de S. En déduire les puissances de M.

   (d) Donner l'expression des réels u_n et v_n en fonction de n, v_0 et w_0.

6. On pose : $F=\bigcup_{n=0}^{+\infty}(X_n=0)$.

   (a) Que représente l'évènement F ?

   (b) Montrer que le virus finit par disparaître presque sûrement, quelle que soit la loi de la variable aléatoire initiale X_0.