Feuille d'exercices n°23 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

15 avril 2010

Exercice 1 (**)

Pour que X soit une variable aléatoire, on doit avoir $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1$. Or, $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = c\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{c}{(1-q)^2}$. On doit donc avoir $c = (1-q)^2$.

On peut alors calculer $E(X) = c\sum_{k=1}^{+\infty} k^2q^{k-1} = cq\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} + c\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{2cq}{(1-q)^3} + \frac{c}{(1-q)^2} = \frac{2q}{1-q} + 1 = \frac{q+1}{1-q}$. De même, $E(X^2) = c\sum_{k=1}^{+\infty} k^3q^{k-1} = cq^2\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)q^{k-3} + 3cq\sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} + c\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{6cq^2}{(1-q)^4} + \frac{6cq}{(1-q)^3} + \frac{c}{(1-q)^2} = \frac{6q^2}{(1-q)^2} + \frac{6q}{1-q} + 1 = \frac{6q+(1-q)^2}{(1-q)^2}$. On a utilisé pour ce calcul la formule donnant la somme d'une série géométrique dérivée troisième : si $|q| < 1$, alors $\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)(k-2)q^k = \frac{6}{(1-q)^4}$, qui s'obtient par exemple par la méthode utilisée en cours pour le calcul des sommes de séries géométriques dérivées secondes.

Exercice 2 (*)

Commençons par calculer $P(X > m) = \sum_{k>m} P(X=k) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} pq^{k-1} = p\sum_{j=0}^{+\infty} q^{j+m} = pq^m\sum_{j=0}^{+\infty} q^j = p\frac{q^m}{1-q} = q^m$. De même, on a donc $P(X > n) = q^n$ et $P(X > n+m) = q^{n+m}$, donc $P_{X>n}(X > n+m) = \frac{P(X > n+m)}{P(X > n)} = q^m$, ce qui prouve bien l'égalité demandée.

Exercice 3 (**)

La variable X prend les valeurs entières supérieures ou égales à 1, et on obtient par la formule des probabilités composées, $\forall k \geqslant 1$, $P(X=k) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{k-1}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$ (tous les termes au numérateur se simplifient avec les premiers dénominateurs). On peu vérifier que X est bien définie presque sûrement en passant par l'égalité $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$, dont on

déduit que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1$ (il serait plus rigoureux d'écrire une somme allant jusqu'à un entier n et de passer à la limite ensuite pour justifier la convergence).
L'espérance de X est donnée par la somme de la série de terme général $kP(X = k) = \frac{1}{k+1}$, qui a ici le mauvais goût d'être une série harmonique divergente. Conclusion : la variable aléatoire a beau être définie presque sûrement, elle n'admet pas d'espérance (c'est intuitivement assez étrange, mais c'est comme ça).

Exercice 4 (***)

1. La moyenne d'une loi de Poisson est égale à son paramètre, on a donc $P(X = k) = e^{-M}\frac{M^k}{k!}$.
2. Si $j < k$, $P_{X=j}(Y = k) = 0$ (on ne peut pas avoir plus de reçus que de candidats !). Sinon, à $X = j$ fixé, le nombre de candidats reçus suit une loi binomiale de paramètre (j, p), donc $P_{X=j}(Y = k) = \binom{j}{k} p^k (1-p)^{j-k}$.
3. Il faut prendre en compte toutes les valeurs possibles de j (autrement dit appliquer la formule des probabilités totales au système complet d'évènements formé des $X = j$, pour $j \in \mathbb{N}$), et on obtient $P(Y = k) = \sum_{j=k}^{+\infty} P(X = j)P_{X=j}(Y = k) = \sum_{j=k}^{+\infty} e^{-M}\frac{M^j}{j!}\binom{j}{k} p^k(1-p)^{j-k}$.
4. Il « suffit » de simplifier l'expression précédente :
$P(Y = k) = e^{-M}p^k \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{M^j}{j!}\frac{j!}{k!(j-k)!}(1-p)^{j-k} = e^{-M}p^k M^k \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{M^{j-k}(1-p)^{j-k}}{k!(j-k)!}$
$= e^{-M}\frac{(Mp)^k}{k!} \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{(M(1-p))^{j-k}}{(j-k)!} = e^{-M}\frac{(Mp)^k}{k!} e^{M-Mp} = e^{-Mp}\frac{(Mp)^k}{k!}$.
On reconnait la forme d'une loi de Poisson, seul le paramètre a changé : $Y \sim \mathcal{P}(Mp)$.

Exercice 5 (**)

Le skieur reprendra la même perche si le nombre de skieurs qui sont passés entre temps vaut $N-1$, $2N-1$, …, $kN-1$ pour un entier $k \geqslant 1$. Puisque ce nombre de skieurs est censé suivre une loi géométrique X, la probabilité recherchée vaut $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = kN-1) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{kN-2} = \frac{p}{(1-p)^2}\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{kN} = \frac{p}{(1-p)^2}\sum_{k=1}^{+\infty}((1-p)^N)^k = \frac{p}{(1-p)^2}\left(\frac{1}{1-(1-p)^N} - 1\right) = \frac{p(1-p)^{N-2}}{1-(1-p)^N}$.
Un petit calcul supplémentaire pour vérifier la crédibilité de la formule (calcul qui n'était pas demandé dans l'énoncé) : quand p tend vers 0, ce qui revient à faire tendre l'espérance de la loi géométrique vers $+\infty$, on peut intuitivement s'attendre à ce que notre probabilité tende vers $\frac{1}{N}$ (en effet, si énormément de gens sont passés par le téléski, la valeur de N devient négligeable et toutes les perches tendent à être équiprobables). Et en effet, quand p tend vers 0, le numérateur de notre expression est équivalent à p (le second facteur tend vers 1), et le dénominateur peut se développer à l'aide du binôme de Newton sous la forme $1 - (1 - Np + o(p))$ (il s'agit d'un polynôme dont les termes prépondérants sont ceux de petits degré quand p tend vers 0), ce qui donne pour équivalent Np. Le quotient a donc bien comme limite $\frac{1}{N}$.

Exercice 6 (**)

1. Chacune des trois variables suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.
2. C'est un calcul dont on va finir par avoir l'habitude : $P(X_i \leqslant k) = \sum_{j=1}^{j=k} p(1-p)^{j-1} = p \times \frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^k = 1-q^k$ (avec ici $p = \frac{1}{6}$, mais on continuera les calculs de façon formelle, c'est aussi simple).
3. Comme $X = \max(X_1, X_2, X_3)$, on aura $(X \leqslant k) = (X_1 \leqslant k) \cap (X_2 \leqslant k) = \cap (X_3 \leqslant k)$, d'où en utilisant la supposition d'indépendance $P(X \leqslant k) = (1-q^k)^3$.
4. L'évènement $X = k$ se produit si $X \leqslant k$ est réalisé, mais pas $X \leqslant k-1$, donc $P(X = k) = P(X \leqslant k) - P(X \leqslant k-1) = (1-q^k)^3 - (1-q^{k-1})^3 = 1 - 3q^k + 3q^{2k} - q^{3k} - 1 + 3q^{k-1} - 3q^{2k-2} + q^{3k-3} = 3q^{k-1}(1-q) - 3q^{2(k-1)}(1-q^2) + q^{3(k-1)}(1-q^3)$.
5. L'espérance existe, son calcul fait intervenir plusieurs séries géométriques dérivées : $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 3(1-q)kq^{k-1} - 3(1-q^2)k(q^2)^{k-1} + (1-q^3)k(q^3)^{k-1} = 3\frac{1-q}{(1-q)^2} - 3\frac{1-q^2}{(1-q^2)^2} + \frac{1-q^3}{(1-q^3)^2} = \frac{3}{1-q} - \frac{3}{1-q^2} + \frac{1}{1-q^3}$. Dans le cas qui nous intéresse ici, $q = \frac{5}{6}$, donc $E(X) = \frac{3}{1-\frac{5}{6}} - \frac{3}{1-\frac{25}{36}} + \frac{1}{1-\frac{125}{216}} = 18 - \frac{108}{11} + \frac{216}{81} \simeq 10.85$.

Exercice 7 (***)

1. Chacune des deux lois est une loi géométrique de paramètre p, donc $P(X = k) = P(Y = k) = p(1-p)^{k-1}$.
2. On a $P(X_A = X_B) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X_A = k) \cap (X_B = k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} (p(1-p)^{k-1})^2 = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)^2)^{k-1} = \frac{p^2}{(1-(1-p)^2)} = \frac{p^2}{2p-p^2} = \frac{p}{2-p}$.
3. C'est un simple calcul de somme : $P(X \geqslant k) = \sum_{i=k}^{+\infty} P(X = i) = \sum_{i=k}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} = p(1-p)^{k-1} \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} = \frac{p(1-p)^{k-1}}{1-(1-p)} = (1-p)^{k-1}$.
4. En admettant que les deux variables sont indépendantes, on a $P(X_B \geqslant X_A) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_A = k)P(X_B \geqslant k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{2k-2} = p\sum_{k=1}^{+\infty}((1-p)^2)^{k-1} = p\frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2p-p^2} = \frac{1}{2-p}$.
Autre façon de voir les choses : les évènements $X_A \geqslant X_B$ et $X_B \geqslant X_A$ ont la même probabilité pour une raison de symétrie évidente, et la probabilité de leur intersection, $X_A = X_B$, a été calculée plus faut, donc $P((X_A \geqslant X_B) \cup (X_B \geqslant X_A)) = 2P(X_B \geqslant X_A) - P(X_A = X_B)$, soit, l'évènement de gauche étant certain, $1 = 2P(X_B \geqslant X_A) - \frac{p}{2-p}$, puis $2P(X_B \geqslant X_A) = \frac{2}{2-p}$, et enfin $P(X_B \geqslant X_A) = \frac{1}{2-p}$.

Exercice 8 (EDHEC 1998) (***)

1. L'évenement $X = 2$ se produit si on tire Pile puis Face aux deux premiers lancers, ce qui donne une probabilité $\frac{1}{4}$.
   (a) Pour avoir $X = 3$, il faut avoir Pile et Face aux deuxième et troisième lancers, ce qui réduit les possibilités aux tirages PPF et FPF, pour lesquels on a effectivement $X = 3$. On a donc $P(X = 3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.
   (b) Constatons qu'à partir du moment où on obtient un Pile, le premier Face qui apparaitra sera précédé d'un Pile. Les seuls possibilités d'avoir $X = k$ sont donc $\underbrace{P\dots P}_{k-1}F$; $F\underbrace{P\dots P}_{k-2}F$; $FF\underbrace{P\dots P}_{k-3}F$; $\dots$; $\underbrace{F\dots F}_{k-2}PF$, soit $k-1$ tirages possibles (le nombre de Pile varie en effet entre 1 et $k-1$).
   (c) Chacun de ces $k-1$ tirages ayant une probabilité $\frac{1}{2^k}$, on a $P(X = k) = \frac{k-1}{2^k}$.
   (d) L'événement $X = 0$ se produit si aucun des événements $X = k$ ne se produit. Autrement dit, les événements $X = k$ étant incompatibles, on a $P(X = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)$ (cette dernière série converge nécessairement car elle est majorée par 1). Or, $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{2^k} = \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{2^{k-2}} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{4} \times 4 = 1$. On en déduit que $P(X = 0) = 0$. L'événement $X = 0$ est négligeable.
2. (a) En effet, si le premier Face apparait avant le $k$ème lancer, on aura un PF avant le lancer k, donc $X < k$. Et si on n'a pas de Face du tout, naturellement, $X > k$.
   (b) On utilise la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(P1, F1)$: $P(X = k) = P((X = k) \cap P_1) + P((X = k) \cap F_1)$. D'après la remarque précédente, le premier terme vaut $\frac{1}{2^k}$ puisqu'il y a un seul tirage possible. Par contre, pour le deuxième terme, on peut oublier le premier tirage puisque c'est un face, et regarder si on obtient un PF sur les $k-1$ derniers tirages, ce qui se produit avec probabilité $P(X = k-1)$, d'où la relation annoncée.
   (c) Si on multiplie l'égalité précédente par 2^k, on obtient $2^k P(X = k) = 1 + 2^{k-1}P(X = k_1)$, soit $u_k = 1 + u_{k-1}$. La suite u_k est donc bien arithmétique, de raison 1 et de premier terme $u_1 = 0$. On a donc $u_k = k-1$. On en déduit que $P(X = k) = \frac{u_k}{2^k} = \frac{k-1}{2^k}$.
3. C'est un calcul de somme géométrique dérivée seconde, qui converge donc :
$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^k} = \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{k-2}} = \frac{1}{4}\frac{2}{(1-\frac{1}{2})^3} = 4.$$