Feuille d'exercices n°23 : Variables aléatoires infinies

ECE3 Lycée Carnot

9 avril 2010

Exercice 1 (**)

Soit X une variable aléatoire dont la loi est de la forme $P(X = k) = ckq^{k-1}$, avec $q \in [0; 1]$ et $c \in \mathbb{R}$. déterminer la valeur de c, puis l'espérance et la variance (si elles existent ...) de X.

Exercice 2 (*)

Montrer que, si $X \sim \mathcal{G}(p)$, on a $P_{X>n}(X > n + m) = P(X > m)$. Pour cette raison, on dit que la loi géométrique est une loi sans mémoire.

Exercice 3 (**)

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages dans cette urne, en remettant après chaque tirage la boule tirée, et en ajoutant une nouvelle boule de la même couleur que la boule tirée. On note X le nombre de tirages nécessaires avant de tirer une boule blanche. Déterminer la loi de X, ainsi que son espérance (si elle existe).

Exercice 4 (***)

La nombre X de candidats se présentant à un examen suit une loi de Poisson de moyenne M. Chaque candidat a une probabilité p d'être reçu, indépendamment des résultats des autres candidats. On note Y le nombre de candidats reçus.

1. Déterminer la loi de X.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $P_{X=j}(Y = k)$ (deux cas à distinguer selon la valeur de j).
3. En déduire la valeur de $P(Y = k)$ sous forme d'une somme.
4. Déterminer la loi de Y.

Exercice 5 (**)

Un téléski est constitué de N perches différentes. Un skieur prend une de ces perches, va faire sa descente et revient au même téléski. On admet qu'entre-temps, le nombre de skieurs ayant emprunté le téléski suit une loi géométrique de paramètre p. Quelle est la probabilité que notre skieur retombe sur la même perche ?

Exercice 6 (**)

On lance trois dés à six faces jusqu'à obtenir trois six, sachant que dès qu'un dé tombe sur 6, on arrête de le lancer, et on se contente de relancer les dés n'ayant pas encore donné un 6. On note X_1 le nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir un 6 sur le premier (et similairement X_2 et X_3 pour les deux autres dés).

1. Quels sont les lois des variables X_1, X_2 et X_3 ?
2. Déterminer $P(X_i \leqslant k)$ pour un entier k donné.
3. Soit X la variable égale au nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir les trois 6. Calculer $P(X \leqslant k)$ (on admettra que les évènements $(X_1 \leqslant k)$, $(X_2 \leqslant k)$ et $(X_3 \leqslant k)$ sont indépendants).
4. En déduire la loi de la variable X.
5. Déterminer, si elle existe, l'espérance de X.

Exercice 7 (***)

Deux joueurs A et B effectuent uns série de lancers de pièce jusqu'à obtenir un Pile avec une pièce truquée pour laquelle la probabilité d'obtenir Pile vaut $p \in [0;1]$. On note X_A et X_B le nombre de tirages nécessaires pour chacun des joueurs.

1. Donner la loi de X_A et de X_B.
2. Calculer la probabilité d'avoir $X_A = X_B$.
3. Soit $k \geqslant 1$. Calculer $P(X_B \geqslant k)$.
4. En déduire la probabilité que le joueur B effectue plus de lancers que le joueur A (c'est-à-dire $P(X_B \geqslant X_A)$).

Exercice 8 (EDHEC 1998) (***)

On réalise une suite de lancers d'une pièce équilibrée, chaque lancer amenant donc pile ou face avec une probabilité $\frac{1}{2}$. On note P_k (respectivement F_k) l'évènement : « on obtient pile (resp. face) au k-ème lancer ».
Pour ne pas surcharger l'écriture, on écrira, par exemple, P_1F_2 à la place de $P_1 \cap F_2$.
On note X la variable aléatoire qui prend la valeur k si l'on obtient pour la première fois pile puis face dans cet ordre aux lancers $k-1$ et k (k désignant un entier supérieur ou égal à 2), X prenant la valeur 0 si l'on obtient jamais une telle succession.

1. Calculer $P(X = 2)$.
2. (a) En remarquant que $(X = 3) = P_1P_2F_3 \cup F_1P_2F_3$, calculer $P(X = 3)$.
   (b) Sur le modèle de la question précédente, écrire, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, l'évènement $(X = k)$ comme réunion de $(k-1)$ évènements incompatibles.
   (c) Déterminer $P(X = k)$ pour tout entier k supérieur ou égal à 2.
   (d) Calculer $\mathrm{P}(X = 0)$.
3. On se propose, dans cette question, de retrouver le résultat de la question 2) c : par une autre méthode.
   (a) Montrer que, k désignant un entier supérieur ou égal à 3, si le premier lancer est un pile, alors il faut et il suffit que $P_2P_3 \dots P_{k-1}F_k$ se réalise pour que $(X = k)$ se réalise.
   (b) En déduire, en utilisant la formule des probabilités totales, que :
   $\forall k \geqslant 3,\ P(X = k) = \frac{1}{2}P(X = k-1) + \frac{1}{2^k}$
   (c) On pose, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_k = 2^k P(X = k)$. Montrer que la suite $(u_k)_{k \geqslant 2}$ est arithmétique. Retrouver le résultat annoncé.
4. Montrer que X a une espérance $E(X)$, puis la calculer.