Feuille d'exercices n°20 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

11 mars 2010

Exercice 1 (*)

Le gain du joueur peut être de 1, 2, 3 ou -1 euro. On a donc $X(\Omega) = \{-1; 1; 2; 3\}$. notons par ailleurs que $|\Omega| = 6^3 = 216$ (on lance trois dés à 6 faces). Il ne reste plus qu'à calculer la probabilité de sortir un nombre de 6 donné pour obtenir la loi de X. Pour obtenir trois 6, il n'y a qu'un tirage possible, soit une probabilité de $\frac{1}{216}$. Pour deux 6, on a le choix du dé qui ne donnera pas un 6 (trois possibilités), ainsi que du chiffre obtenu sur ce dé (cinq possibilités), soit une probabilité de $\frac{3 \times 5}{216} = \frac{15}{216}$. De même, pour un 6, trois choix pour le dé qui donne 6, et cinq choix pour le résultat de chacun des deux dés restants, soit une probabilité de $\frac{3 \times 5^2}{216} = \frac{75}{216}$. Enfin, si on n'obtient pas de 6, on a cinq choix pour chaque dé, soit une probabilité de $\frac{5^3}{216} = \frac{125}{216}$. On vérifie que la somme de ces probabilités est bien égale à 1, et on a donc la loi suivante :

k	-1	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

Le reste est du pur calcul : $E(X) = \frac{-1 \times 125 + 1 \times 75 + 2 \times 15 + 3 \times 1}{216} = -\frac{17}{216} \simeq 0.08$. On perdra donc en moyenne huit centimes d'euros par partie. Ensuite, $E(X^2) = \frac{1 \times 125 + 1 \times 75 + 4 \times 15 + 9 \times 1}{216} = \frac{269}{216}$, donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{269}{216} - \left(\frac{17}{216}\right)^2 = \frac{69\ 920}{46\ 656} = \frac{2\ 185}{1\ 458} \simeq 1.5$ (soit $\sigma \simeq 1.22$).

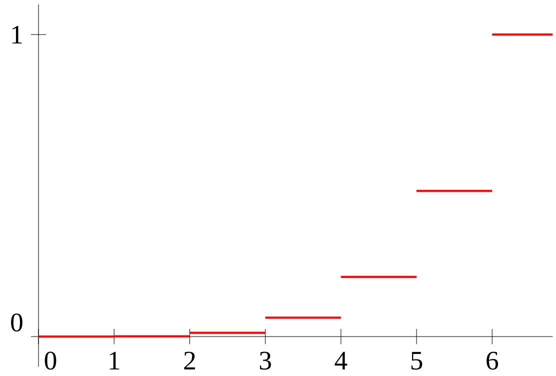
Exercice 2 (**)

On a bien évidemment $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ (quand on lance simultanément quatre dés, il est tout à fait possible que le plus grand chiffre obtenu soit 1 puisque les répétitions sont possibles). Notons également que $|\Omega| = 6^4 = 1\ 296$. Plutôt que de calculer directement la loi de X, il est beaucoup plus simple ici de calculer la probabilité des évènement A_i : « Le plus grand chiffre obtenu est inférieur ou égal à i ». En effet, cela revient à dire que chacun des quatre dés a donné un résultat inférieur ou égal à i, ou encore qu'on a i possibilités pour chaque dé. Ainsi, $P(A_6) = \frac{6^4}{6^4} = 1$; $P(A_5) = \frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{1\ 296}$; $P(A_4) = \frac{4^4}{6^4} = \frac{256}{1\ 296}$; $P(A_3) = \frac{81}{1\ 296}$; $P(A_2) = \frac{16}{1\ 296}$ et enfin $P(A_1) = \frac{1}{1\ 296}$. Ensuite, remarquons que l'évènement $X = i$ correspond à avoir A_i réalisé (si le maximum vaut i, il est certainement inférieur ou égal à i), mais pas A_{i-1} (sinon, le maximum sera strictement inférieur à i). Chaque évènement A_{i-1} étant inclus dans A_i, on en déduit que $P(X = 6) = P(A_6) - P(A_5) = \frac{1\ 296 - 625}{1\ 296} = \frac{671}{1\ 296}$, $P(X = 5) = P(A_5) - P(A_4) = \frac{369}{1\ 296}$ etc. Soit la loi suivante :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{1\ 296}$	$\frac{15}{1\ 296}$	$\frac{65}{1\ 296}$	$\frac{175}{1\ 296}$	$\frac{369}{1\ 296}$	$\frac{671}{1\ 296}$

On a donc $E(X) = \dfrac{1+30+195+700+1\ 845+4\ 026}{1\ 296} = \dfrac{6\ 797}{1\ 296} \simeq 5.24$; puis $E(X^2) = \dfrac{1+60+585+2\ 800+9\ 225+24\ 156}{1\ 296} = \dfrac{36\ 827}{1\ 296}$, et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 \simeq 0.91$ (soit $\sigma \simeq 0.95$).

Évidemment, tracer la courbe de la fonction de répartition n'est pas extrêmement aisé quand on n'a pas de quoi découper son échelle en 1 296 de façon précise. Ce qui est intéressant ici, c'est que les sauts apparaissant sur cette courbe sont exactement les valeurs des probabilités des évènements A_i calculées un peu plus haut. On verra dans un chapitre ultérieur que, pour calculer la loi d'un maximum, comme ici, il est souvent efficace de passer par la fonction de répartition. Voici tout de même la courbe :



Exercice 3 (**)

C'est un exercice très bête et méchant. Commençons donc par la variable X. Elle peut prendre les valeurs entières comprises entre 1 et 5 (après cinq tirages, il ne reste plus que deux boules dans l'urne, donc il ne peut pas rester plus de deux couleurs !). On aura $X = 1$ uniquement si on tire la boule rouge au premier tirage, soit $P(X = 1) = \dfrac{1}{7}$. On a ensuite $X = 2$ dans deux cas : tirage des deux boules jaunes aux deux premiers tirages (dans un ordre ou dans l'autre), ou tirage d'une boule autre que la rouge au premier tirage, et de la rouge au deuxième, soit $P(X = 2) = \dfrac{2}{7\times 6} + \dfrac{6}{7} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{21} + \dfrac{1}{7} = \dfrac{4}{21}$. Pour $X = 3$, on a les tirages possibles suivants : VVR, VJR, JVR, JVJ, VJJ (ici, faire un arbre commence à devenir intéressant), soit une probailité totale de $\dfrac{4\times 3+4\times 2+2\times 4+2\times 4+4\times 2}{7\times 6\times 5} = \dfrac{44}{210} = \dfrac{22}{105}$. Pour $X = 4$, on a les possibilités $VVVR$, $VVJR$, $VJVR$, $JVVR$, $VVJJ$, $VJVJ$, $JVVJ$ et $VVVV$, ce qui donne une probabilité $P(X = 4) = \dfrac{4\times 3\times 2+4\times 3\times 2+4\times 2\times 3+2\times 4\times 3+4\times 3\times 2+4\times 2\times 3+2\times 4\times 3+4\times 3\times 2}{7\times 6\times 5\times 4}$ $= \dfrac{8\times 24}{7\times 6\times 5\times 4} = \dfrac{8}{35}$. Enfin, pour avoir $X = 5$, il faut nécessairement tirer trois vertes et une jaune lors des quatre premiers tirages (sinon, on aura épuisé une des trois couleurs avant le cinquième tirage), ce qui laisse $4\times 3\times 2\times 2\times 4$ possibilités (le deuxième 4 étant pour le choix de la position de la boule jaune), puis on tire n'importe laquelle des trois boules restantes au cinquième tirage, soit $P(X = 5) = \dfrac{4\times 3\times 2\times 2\times 4\times 3}{7\times 6\times 5\times 4\times 3} = \dfrac{8}{35}$. On a donc finalement la loi suivante :

k	1	2	3	4	5
$P(X=k)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{22}{105}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{8}{35}$

On calcule maintenant sans difficulté $E(X) = \dfrac{1}{7} + \dfrac{8}{21} + \dfrac{66}{105} + \dfrac{32}{35} + \dfrac{40}{35} = \dfrac{337}{105} \simeq 3.21$; puis $E(X^2) = \dfrac{1}{7} + \dfrac{16}{21} + \dfrac{198}{105} + \dfrac{128}{35} + \dfrac{200}{35} = \dfrac{1\ 277}{105}$, et $E(X^2) - E(X)^2 \simeq 1.86$ (soit $\sigma \simeq 1.36$).

Pour la variable Y, les calculs sont assez similaires. Elle peut prendre les valeurs 3, 4, 5 et 6 (il faut au moins tirer trois boules pour épuiser deux couleurs, et au bout de six tirages il ne peut rester qu'une couleur dans l'urne). On aura $Y = 3$ si on tire les deux rouges et la jaune lors des trois premiers tirages (peu importe l'ordre), soit $P(Y = 3) = \dfrac{3!}{7 \times 6 \times 5} = \dfrac{1}{35}$. Ensuite $Y = 4$ si on tire deux jaunes et une verte lors des trois premiers tirages, puis la rouge au quatrième (peu importe l'ordre pour les trois premiers tirages, mais on a le choix sur la verte, soit $3! \times 4$ tirages) ; ou une de chaque couleur lors des premiers tirages, et la deuxième jaune au quatrième ($3! \times 4 \times 2$ possibilités), donc $P(Y = 4) = \dfrac{3! \times 4 + 3! \times 4 \times 2}{7 \times 6 \times 5 \times 4} = \dfrac{3}{35}$. Pour $Y = 5$, on peut avoir deux jaunes et deux vertes (ordre au choix) puis la rouge ($4 \times 3 \times 2 \times \dbinom{4}{2}$ tirages) ; ou quatre vertes et une rouge (ordre au choix sur les cinq tirages, $5!$ possibilités) ; ou enfin deux vertes, une jaune et la rouge (ordre au choix), puis la deuxième jaune ($4! \times 12$ possibilités), soit $P(Y = 5) = \dfrac{24 \times 6 + 24 \times 5 + 24 \times 12}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3} = \dfrac{23}{105}$. Enfin, on aura $Y = 6$ si on tire les quatre vertes et les deux jaunes (peu importe l'ordre, $6!$ choix) ; ou bien 4 vertes, une jaune et la rouge en ne finissant pas par la jaune (5×2 possibilités pour la jaune avec la position, 5 pour la rouge et $4!$ pour les vertes) ; ou 3 vertes et 2 jaunes (ordre aléatoire), puis la rouge (5×4 possibilités pour les positions des jaunes, $4 \times 3 \times 2$ choix pour les vertes) ; ou enfin 3 vertes, une jaune et la rouge, puis la deuxième jaune (5 choix de position pour la rouge, 4×2 pour la jaune, $4 \times 3 \times 2$ pour les vertes), soit au total $P(Y = 6) = \dfrac{6! + 10 \times 5! + 4 \times 5! + 8 \times 5!}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = \dfrac{28}{42} = \dfrac{2}{3}$. Voici donc la loi de Y :

k	3	4	5	6
$P(Y = k)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{23}{105}$	$\frac{2}{3}$

On calcule maintenant sans difficulté $E(X) = \dfrac{3}{35} + \dfrac{12}{35} + \dfrac{115}{105} + 4 = \dfrac{116}{21} \simeq 5.52$; puis $E(X^2) = \dfrac{9}{35} + \dfrac{48}{35} + \dfrac{575}{105} + 24 = \dfrac{3\ 266}{105}$, et $E(X^2) - E(X)^2 \simeq 0.59$ (soit $\sigma \simeq 0.77$).

Exercice 4 (***)

1. Comme l'énoncé nous l'a signalé, on aura nécessairement $X \geqslant 2$. On peut par ailleurs prendre toutes les valeurs jusqu'à n inclus (un tirage possible où $X = n$ est n ; $n - 1$; … ; 4 ; 3 ; 1 ; 2), donc $X(\Omega) = \{2; \dots; n\}$.
2. Dans le cas où $n = 3$, il n'y a que $3! = 6$ ordres possibles pour les tirages (on considèrera qu'on mène les tirages jusqu'au bout même une fois qu'on a tiré un numéro supérieur au précédent, c'est plus simple). Parmi ces six, il y en a 3 pour lesquels le deuxième numéro est plus grans que le premier : 123 ; 132 et 231, donc $P(X = 2) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$; et donc trois pour lesquels $X = 3$ (on n'aura pas nécessairement un troisième numéro plus grand que le deuxième, mais comme on n'a plus de boule à tirer il faut bien s'arrêter), donc $P(X = 3) = \dfrac{1}{2}$. L'espérance correspondante vaut $\dfrac{5}{2}$.

   Dans le cas où $n = 5$, il y a $5! = 120$ tirages possibles. On aura $X = 2$ si on débute notre série de tirages par 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35 ou 45 (puis on peut tirer les trois derniers nombres dans n'importe quel ordre), soit $P(X = 2) = \dfrac{10 \times 3!}{120} = \dfrac{1}{2}$. On aura $X = 3$ si on commence par 21, 31, 41, 51 (puis n'importe quoi), ou 324, 325, 423, 425, 435, 523, 524, 534, soit $P(X=3)=\dfrac{4\times 3!+8\times 2!}{120}=\dfrac{1}{3}$. On aura $X=4$, si on débute par 321, 431, 421, 541, 531, 521, et pour les tirages 43251, 54231, 53241, soit $P(X=4)=\dfrac{6\times 2!+3}{120}=\dfrac{1}{8}$. Enfin, on aura $X=5$ pour les tirages 43215, 53214, 54213, 54312, et 54321, soit $P(X=5)=\dfrac{5}{120}=\dfrac{1}{24}$. On obtient cette fois-ci une espérance valant $E(X)=2\times\dfrac{1}{2}+3\times\dfrac{1}{3}+4\times\dfrac{1}{8}+5\times\dfrac{1}{24}=\dfrac{65}{24}\simeq 2.71$.

Dans le cas général, il va bien falloir trouver une façon intelligente de faire le calcul. Supposons $X=k$, cela signifie qu'on a tiré k numéros dont les $k-1$ premiers sont apparus en ordre décroissant. Une fois qu'on sait quel est le k-ème numéro tiré, l'ordre du tirage est donc totalement imposé. Or, ce k-ème numéro tiré peut être n'importe lequel des k numéros tirés, sauf le plus petit. Ainsi, si on $X=4$ et qu'on a tiré les numéros 1, 3, 6 et 8, on a pu tirer dans les trois ordres suivants : 8613, 8316 ou 6318. On a donc $\dbinom{n}{k}$ choix pour les numéros tirés, $k-1$ choix pour le numéro qui apparait au tirage k, et $(n-k)!$ choix pour l'ordre des tirages suivant le tirage numéro k. Conclusion $P(X=k)=\dfrac{\dbinom{n}{k}(k-1)(n-k)!}{n!}=\dfrac{k-1}{k!}$. Seule petite exception si $k=n$: il faut ajouter le cas très particulier où on a tiré tous les numéros dans le sens décroissant, ce qui représente un seul cas sur les $n!$ possibles, donc $P(X=n)=\dfrac{\dbinom{n}{n}(n-1)0!+1}{n!}=\dfrac{n}{n!}$. On peut désormais calculer l'espérance de X : $E(X)=\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n}\frac{k(k-1)}{k!}+n\times\frac{1}{n!}$ (on a séparé le cas particulier signalé auparavant pour rendre le calcul plus simple), soit $E(X)=\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{(k-2)!}+\frac{1}{n!}=\sum_{k=0}^{k=n-2}\frac{1}{k!}+\frac{1}{n!}$.

3. On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}=0$, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k!}=e$ (c'est la somme de la série exponentielle), donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}E(X)=e$ (eh oui, c'est étonnant mais c'est comme ça).

Exercice 5 (*)

Si on tire une seule carte, et qu'on note Y sa valeur en points, $Y(\Omega)=\{0;1;2;3;4\}$, et on a $P(Y=i)=\dfrac{4}{52}=\dfrac{1}{13}$, si $i\in\{1;2;3;4\}$, et $P(Y=0)=\dfrac{36}{52}=\dfrac{9}{13}$ (puisqu'il y a quatre As, quatre Rois, quatre Dames, quatre Valets, et 36 cartes sans points dans un jeu de 52). On a donc $E(Y)=\dfrac{4+3+2+1+0\times 9}{13}=\dfrac{10}{13}$. Considérons désormais le nombre de points X obtenus quand on pioche 13 cartes. On a $X=Y_1+Y_2+\cdots+Y_{13}$, où Y_1 désigne le nombre de points de la première carte piochée, Y_2 celui de la deuxième etc. Par linéarité de l'espérance, $E(X)=E(Y_1)+\cdots+E(Y_{13})=13\times E(Y)=10$.

Exercice 6 (d'après ISCID 91) (***)

1. (a) Il y a donc 4 boules dans l'urne : une blanche et trois noires, et on tire jusqu'à obtenir la blanche. On a donc $X(\Omega)=\{1;2;3;4\}$, avec $P(X=1)=\dfrac{1}{4}$; $P(X=2)=\dfrac{3}{4}\times 13=\dfrac{1}{4}$,

$P(X=2)=\dfrac{3}{4}\times 23\times 12=\dfrac{1}{4}$ et $P(X=4)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{4}$. En fait, c'est logique : si on tire les boules les unes après les autres, on a une chance sur quatre de vois la boule blanche apparaitre à chaque position. On a dans ce cas $E(X)=\dfrac{1+2+3+4}{4}=\dfrac{5}{2}$; $E(X^2)=\dfrac{1+4+9+16}{4}=\dfrac{15}{2}$, donc $V(X)=\dfrac{15}{2}-\dfrac{25}{4}=\dfrac{5}{4}$.

(b) Toujours quatre boules, mais deux blanches et deux noires. La variable X ne peut plus prendre que les valeurs 2, 3 et 4 (il faut attendre deux tirages avant de pouvoir tirer les deux boules blanches), et $P(X=2)=\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$; $P(X=3)=\dfrac{2}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}\times 23\times 12=\dfrac{1}{3}$; $P(X=4)=3\times\dfrac{2}{4}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$. On a cette fois-ci $E(X)=2\times\dfrac{1}{6}+3\times\dfrac{1}{3}+4\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{10}{3}$; $E(X^2)=4\times\dfrac{1}{6}+9\times\dfrac{1}{3}+16\times 12=\dfrac{35}{3}$, donc $V(X)=\dfrac{35}{3}-\dfrac{100}{9}=\dfrac{5}{9}$.

2. (a) Il faut attendre au moins r tirages avant de s'arrêter, et on peut bien sûr aller jusqu'à N tirages, donc $X(\Omega)=\{r;r+1;\dots;N\}$.

(b) On a effectué $k-1$ tirages, donc $\dbinom{N}{k-1}$ possibilités au total si on ne tient pas compte de l'ordre. Parmi ces possibilités il y en a $\dbinom{r}{r-1}\times\dbinom{N-r}{k-r}$. La probabilité de tirer la r-ème boule blanche au tirage suivant sachant qu'il ne reste plus qu'un boule blanche sur les $N-(k-1)$ restant dans l'urne est de $\dfrac{1}{N+1-k}$, donc $P(X)=\dfrac{\dbinom{r}{r-1}\times\dbinom{N-r}{k-r}}{\dbinom{N}{k-1}}\times\dfrac{1}{N+1-k}$.

(c) Simplifions donc : $P(X=k)=r\times\dfrac{(N-r)!}{(k-r)!(N-k)!}\times\dfrac{(k-1)!(N+1-k)!}{N!}\times\dfrac{1}{N+1-k}=r\times\dfrac{(N-r)!(k-1)!}{(k-r)!N!}$; et $\dfrac{\dbinom{k-1}{r-1}}{\dbinom{N}{r}}=\dfrac{(k-1)!}{(r-1)!(k-r)!}\times\dfrac{r!(N-r)!}{N!}=r\times\dfrac{(k-1)!(N-r)!}{(k-r)!N!}$.

Les deux quantités sont bien égales. Comme la somme de toutes ces probabilités doit donner 1, et que le dénominateur ne dépend pas de k, on obtient $\displaystyle\sum_{k=r}^{N}\binom{k-1}{r-1}=\binom{N}{r}$.

Un tout petit changement d'indice donne ensuite $\displaystyle\sum_{k=r-1}^{N-1}\binom{k}{r-1}=\binom{N}{r}$, soit encore $\displaystyle\sum_{k=r}^{N-1}\binom{k}{r}=\binom{N}{r+1}$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=r}^{N}\binom{k}{r}=\binom{N+1}{r+1}$. De même, $\displaystyle\sum_{k=r}^{N-2}\binom{k+1}{r+1}=\binom{N}{r+2}$, donc $\displaystyle\sum_{k=r}^{N}\binom{k+1}{r+1}=\binom{N+2}{r+2}$.

(d) On a tous les éléments nécessaires :

$$E(X)=\frac{1}{\dbinom{N}{r}}\sum_{k=r}^{k=N}k\times\binom{k-1}{r-1}=\frac{1}{\dbinom{N}{r}}\sum_{k=r}^{k=N}\frac{k!}{(r-1)!(k-r)!}$$

$$=\frac{1}{\dbinom{N}{r}}\sum_{k=r}^{k=N}r\times\binom{k}{r}=\frac{r}{\dbinom{N}{r}}\times\binom{N+1}{r+1}$$

$$= r \times \frac{(N+1)!}{(r+1)!(N-r)!} \times \frac{r!(N-r)!}{N!} = \frac{r(N+1)}{r+1}.$$

(e) Similairement, $E(X(X+1)) = \frac{1}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^{k=N} k(k+1) \times \binom{k-1}{r-1} = \frac{1}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^{k=N} \frac{(k+1)!}{(r-1)!(k-r)!}$

$$= \frac{1}{\binom{N}{r}} \sum_{k=r}^{k=N} r(r+1) \times \binom{k+1}{r+1} = \frac{r(r+1)}{\binom{N}{r}} \times \binom{N+2}{r+2}$$

$$= r(r+1) \times \frac{r!(N-r)!}{N!} \times \frac{(N+2)!}{(r+2)!(N-r)!} = \frac{r(N+1)(N+2)}{r+2}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \frac{r(N+1)(N+2)}{r+2} + \frac{r(N+1)}{r+1} - \frac{r^2(N+1)^2}{(r+1)^2} = r(N+1)\left(\frac{N+2}{r+2} + \frac{1-rN}{(r+1)^2}\right)$.

Exercice 7 (d'après Ecricome 2008) (***)

1. Si $n = 0$, on a bien sûr toujours $T_n = 0$. Dans le cas contraire, il y aura toujours au moins une case non vide, et au plus n après n lancers, sachant toutefois qu'on ne peut dépasser N cases non vides dans le cas où $N < n$ donc $T_n(\Omega) = \{1; 2; \dots; min(n, N)\}$.
2. Après 1 lancer, il y aura toujours exactement une case non vide (celle dans lequel on a lancé la boule), donc $T_1 = 1$ (variable aléatoire constante). Au deuxième lancer, soit on relance dans la même case qu'au premier, et on a alors $T_2 = 1$, soit on lance dans une autre et $T_2 = 2$. La probabilité de lancer dans la même case étant $\frac{1}{N}$, on a $P(T_2 = 1) = \frac{1}{N}$, et $P(T_2 = 2) = \frac{N-1}{N}$.
3. Pour avoir $T_n = 1$, il faut avoir obtenu à chaque lancer à partir du deuxième la même case qu'au premier lancer, ce qui se produit avec probabilité $\frac{1}{N}$ à chaque lancer, soit $P(T_n = 1) = \left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}$.

   Le nombre de tirages donnant $T_n = 2$ est obtenu en choisissant deux cases parmi les N, puis en se laissant deux possibilités à chaque tirage, et en supprimant à la fin les 2 tirages où on a tiré toujours dans la même case, soit $\binom{N}{2} \times 2^n - 2 = 2^{n-1}N(N-1) - 2$. Ceci est à diviser par le nombre total de tirages, qui vaut N^n, donc $P(T_n = 2) = \frac{N(N-1)2^n - 2}{N^n}$.

   Si $n \leqslant N$, $T_n = n$ si on tombe dans une nouvelle case à chaque tirage, ce qui correspond à $N(N-1)\dots(N-n+1)$ tirages, soit $P(T_n = n) = \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{N^n} = \frac{N!}{(N-n)!N^n}$.
   Si $n > N$, on ne peut pas avoir n cases non vides, donc $P(T_n = n) = 0$.
4. Les évènement $T_n = k$ forment un système complet d'évènements, donc on peut écrire en utilisant la formule des probabilités totales que $P(T_{n+1} = k) = \sum_{i=1}^{i=n} P(T_n = i) P_{T_n = i}(T_{n+1})$.
   Mais parmi les probabilités conditionnelles apparaissant dans cette formule, seules deux sont non nulles : soit on avait déjà k cases non vides après n tirages et on a à nouveau tiré dans une de ces k cases (probabilité $P_{T_n=k}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}$) ; soit on en avait $k-1$ non vides et on a tiré dans une des $N-(k-1)$ cases restantes : $P_{T_n=k-1}(T_{n+1} = k) = \frac{N-k+1}{N}$. La formule demandée est donc exacte.
5. (a) On a $G_n(1) = \sum_{k=1}^{k=n} P(T_n = k) = 1$.

(b) Calculons : $E(T_n) = \sum_{k=1}^{k=n} kP(T_n = k)$. Or, en dérivant G_n, on obtient $G'_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n} kP(T_n = k)x^{k-1}$. En remplaçant par 1, on tombe exactement sur $E(T_n)$, qui est donc égale à $G'_n(1)$.

(c) Notons pour commencer que la formule de la question 4 reste en fait valable pour $k = n+1$, puis sommons ces égalités :

$G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{k=n+1} P(T_{n+1} = k)x^k = \sum_{k=1}^{k=n+1} \left(\frac{k}{N}P(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}P(T_n = k-1)\right) x^k$

$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=n+1} kP(T_n = k)x^k + (N-k+1)P(T_n = k-1)x^k$

$= \frac{x}{N} \sum_{k=1}^{n} kP(T_n = k)x^{k-1} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=n} (N-k)P(T_n = k)x^{k+1}$

$= \frac{x}{N} G'_n(x) + \frac{x}{N} \sum_{k=1}^{k=n} NP(T_n = k)x^k + \frac{x^2}{N} \sum_{k=1}^{k=n} kP(T_n = k)x^{k-1}$

$= \frac{x}{N} G'_n(x) + xG_n(x) - \frac{x^2}{N} G'n(x)$, ce qui correspond bien à la formule annoncé (les indices disparaissant dans certaines sommes du calcul correspondent à des termes nuls).

(d) Dérivons donc : $G'_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(1-2x)G'_n(x) + \frac{1}{N}(x - x^2)G''_n(x) + G_n(x) + xG'_n(x)$. En prenant $x = 1$ (ce qui a le bon goût d'annuler le terme faisant intervenir la dérivée seconde) et en réutilisant les résultats précédents, on a $E(T_{n+1}) = -\frac{1}{N}E(T_n) + 1 + E(T_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(T_n) + 1$.

(e) Notons $u_n = E(T_n)$. La suite (u_n) est arithémtico-géométrique, d'équation de point fixe $x = \left(1 - \frac{1}{N}\right) x + 1$, donnant $x = N$. Posons donc $v_n = u_n - N$, alors $v_{n+1} = u_{n+1} - N = \left(1 - \frac{1}{N}\right) u_n + 1 - N = \frac{N-1}{N}u_n - (N-1) = \frac{N-1}{N}(u_n - N) = \frac{N-1}{N}v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{N-1}{N}$ et de premier terme $v_1 = u_1 - N = 1 - N$, donc $v_n = (1-N)\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1} = -\frac{(N-1)^n}{N^{n-1}}$. On en déduit que $u_n = N - \frac{(N-1)^n}{N^{n-1}} = \frac{N^n - (N-1)^n}{N^{n-1}} = N\left(1 - \frac{(N-1)^n}{N^n}\right) = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)$. Lorsque n tend vers $+\infty$, $\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$ va tendre vers 0, la parenthèse vers 1, et l'espérance de T_n vers N, ce qui est intuitivement normal.