Feuille d'exercices n°20 : Variables aléatoires finies

ECE3 Lycée Carnot

11 mars 2010

Exercice 1 (*)

On joue au jeu suivant : on parie sur un nombre compris entre 1 et 6, puis on lance trois dés et on gagne 3 euros si le nombre sort 3 fois, 2 euros s'il sort deux fois, 1 euro s'il sort une fois. On perd 1 euro s'il ne sort pas. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable X représentant le gain du joueur.

Exercice 2 (**)

On lance simultanément quatre dés à 6 faces et on note X le plus grand chiffre obtenu. Déterminer la loi de X, ainsi que son espérance et sa variance. Tracer la courbe de la fonction de répartition de X.

Exercice 3 (**)

Une urne contient initialement 4 boules vertes, 2 jaunes et une rouge. On y effectue des tirages successifs sans remise et on note X le nombre de tirages nécessaire pour qu'il ne reste plus que deux couleurs dans l'urne et Y le nombre de tirages nécessaire pour qu'il n'y ait plus qu'une couleur. Déterminer les lois, espérances et variances de X et Y.

Exercice 4 (***)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages sans remise dans cette urne jusqu'à ce que le numéro tiré ait un numéro supérieur ou égal au numéro tiré juste avant (ce qui suppose qu'on effectue au moins deux tirages ; par exemple une suite de tirage possible est 7, 4, 2, 5 et on s'arrête après ce quatrième tirage). On note X le nombre de tirages effectués.

1. Quels sont les valeurs prises par la variable X ?
2. Déterminer la loi de X puis son espérance (on pourra commencer par traiter les cas $n = 3$ et $n = 5$).
3. Quelle est la limite de $E(X)$ quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 5 (*)

Au bridge, on joue avec un jeu de 52 cartes et on attribue habituellement 4 points pour un As, 3 pour un Roi, 2 pour une Dame et 1 pour un Valet (et 0 pour tout autre carte). Un joueur pioche 13 cartes dans le jeu de 52, on note X le nombre de points contenu dans son jeu. Quelle est le nombre de points moyen d'une carte tirée au hasard dans le jeu ? En déduire $E(X)$ (sans calculer sa loi).

Exercice 6 (d'après ISCID 91) (***)

On considère une urne de taille $N > 1$ contenant r boules blanches et $N - r$ boules noires ($0 \leqslant r < N$). Dans cette urne, on prélève les boules une à une et sans remise, jusqu'à l'obtention de toutes les boules blanches, et on note X le nombre de tirages qu'il est nécessaire d'effectuer pour cela. Le but de l'exercice est de déterminer la loi de X, ainsi que son espérance et sa variance.

1. (a) Traiter le cas $N = 4$ et $r = 1$.
   (b) Traiter le cas $N = 4$ et $r = 2$.
2. Etude du cas général : $(1 < r < N)$
   (a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
   (b) Soit k l'une de ces valeurs. Déterminer la probabilité pour qu'au cours des $k - 1$ premiers tirages soient apparues $r - 1$ boules blanches (et donc, $k - r$ boules noires). En déduire la valeur de $P(X = k)$, c'est-à-dire la probabilité pour que la r^{i-eme} (et dernière) boule blanche apparaisse au k^{i-eme} tirage.
   (c) Vérifier, après simplifications, que $P(X = k) = \dfrac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}$. En déduire les valeurs des sommes : $\displaystyle\sum_{k=r}^{N} \binom{k-1}{r-1}$, puis $\displaystyle\sum_{k=r}^{N} \binom{k}{r}$ et $\displaystyle\sum_{k=r}^{N} \binom{k+1}{r+1}$.
   (d) Montrer que $E(X) = \dfrac{r(N+1)}{r+1}$.
   (e) De même, calculer $E(X(X+1))$ et en déduire $V(X)$.

Exercice 7 (d'après Ecricome 2008) (***)

Un joueur lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N (avec $N \geqslant 2$), chaque boule ayant probabilité $\dfrac{1}{N}$ de tomber dans chacune des N cases (et les tirages de boules étant indépendants les uns des autres). On cherche à étudier la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases **non** vides après n lancers.

1. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs prises par T_n.
2. Donner les lois de T_1 et de T_2.
3. Déterminer, lorsque $n \geqslant 2$, les probabilités $P(T_n = 1)$, $P(T_n = 2)$ et $P(T_n = n)$ (en distingant suivant que $n \leqslant N$ ou $n > N$).
4. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que si $1 \leqslant k \leqslant n$, alors $P(T_{n+1} = k) = \dfrac{k}{N}P(T_n = k) + \dfrac{N-k+1}{N}P(T_n = k-1)$.
5. On considère dans cette question le polynôme $G_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} P(T_n = k)x^k$.
   (a) Quelle est la valeur de $G_n(1)$?
   (b) Exprimer $E(T_n)$ en fonction de $G'_n(1)$.
   (c) En utilisant la relation démontrée à la question 4, montrer que $G_{n+1}(x) = \dfrac{1}{N}(x - x^2)G'_n(x) + xG_n(x)$.
   (d) Dériver l'expression précédente et en déduire que $E(T_{n+1}) = \left(1 - \dfrac{1}{N}\right) E(T_n) + 1$.
   (e) En déduire la valeur de $E(T_n)$ et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 (d'après EM Lyon 2000) (***)

Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignées sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $E(X)$ son espérance.

1. Montrer : $\forall k \in \{1, ..., 2n-1\},\ P(X = k) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$
2. Montrer : $E(X) = \dfrac{2n+1}{3}$.
3. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs losqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte, G_1 est égale à $a - k$. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G_1.

Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs losqu'il obtient le premier roi rouge.On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte ($k \leqslant n$), G_2 est égale à $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

1. Pour tout entier $k \in \{1, ..., n\}$, déterminer $P(G_2 = a - k)$.
2. Vérifier : $P(G_2 = -n) = \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$.
3. Montrer : $E(G_2) = \dfrac{3(3n-1)a - \left(7n^2 - 1\right)}{6(2n-1)}$.

Comparaison des deux protocoles

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$). Déterminer, selon les valeurs de a, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.