Feuille d'exercices n°15 : suites récurrentes

ECE3 Lycée Carnot

20 janvier 2010

Exercice 1 (**)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}(2 - u_n^2)$.

1. On note f la fonction définie par $f(x) = x + \frac{1}{4}(2 - x^2)$. Étudier les variations de f et déterminer ses points fixes.
2. Montrer que $\forall x \in [1;2]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$, et que $f([1;2]) \subset [1;2]$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1;2]$, et que $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|u_n - \sqrt{2}|$.
4. Prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^n}$, et en déduire la limite de la suite (u_n).
5. À partir de quel rang a-t-on $|u_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-9}$?

Exercice 2 (**)

On considère la fonction f définie sur $]0; \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x + 1}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. La fonction prolongée est-elle dérivable en 0 ?
2. Étudiez les variations de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.
3. Déterminer les points fixes de f.
4. On définit une suite (x_n) par $x_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   (a) Étudiez sur $\mathbb{R}_+$ la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x}{(x+1)^2}$, en déduire que $\forall x \in]1; +\infty[$, $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{4}$.
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{4}|x_n - 1|$, puis que $|x_n - 1| \leq \dfrac{1}{4^n}$.
   (c) En déduire la limite de la suite (x_n).

Exercice 3 (**)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_-$ par $f(x) = \dfrac{e^x - 3}{2}$. Le but de l'exercice est de calculer une valeur approchée de la solution de l'équation $e^x = 3 + 2x$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution négative, que l'on notera α, et que $f(\alpha) = \alpha$.
2. Montrer que $]-\infty; 0]$ est un intervalle stable par la fonction f.
3. Prouver que, $\forall x \in]-\infty; 0]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.

4. On définit désormais une suite (u_n) par $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 0$.
5. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
6. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}$.
7. Montrer que la suite (u_n) converge vers α.
8. Écrire un programme Pascal déterminant une valeur approchée de α à ε près, où ε est un réel positif choisi par l'utilisateur.

Exercice 4 (d'après ESCL 2001) (***)

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ si $x > 0$, et $f(0) = 0$.

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$, et calculer sa dérivée sur cet intervalle.
   (c) Étudier la limite de f' quand x tend vers 0.
   (d) En déduire que f est en fait $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (e) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$.
2. (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$ et que
$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2)$$
   (b) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$. En déduire le signe de f''.
   (c) En déduire le sens de variation de f, préciser sa limite en $+\infty$, et dresser son tableau de variations.
   (d) Tracer une allure de la courbe représentative de f.
3. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $|f'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$ et $0 \leq f(x) \leq 1$.
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ln 2| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \ln 2|$.
   (d) En déduire que (u_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 5 (***)

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1}$. Déterminer la nature de la suite (u_n) en distinguant éventuellement plusieurs cas selon la valeur de u_0.