Feuilles d'exercices n°4 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

7 octobre 2009

Exercice 1

La suite (u_n) vérifie d'après l'énoncé la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{5}{100} \times 1\ 000 = u_n + 50$, c'est donc une suite arithmétique de raison 50 et de premier terme $u_0 = 1\ 000$. On sait alors que $u_n = 1\ 000 + 50n$. De même, la suite (v_n) vérifie la relation de récurrence $v_{n+1} = v_n + \frac{3}{100} v_n = v_n \times 1,03$, donc (v_n) est une suite géométrique de raison $1,03$ et de premier terme $v_0 = 1\ 000$. Toujours d'après le cours, on a donc $v_n = 1\ 000 \times 1,03^n$.

Si l'épargnant choisit le placement A, il aura doublé son capital lorsque $1\ 000 + 50n = 2\ 000$, soit $50n = 1\ 000$, donc $n = 20$. S'il choisit le placement B, il aura doublé son capital lorsque $1\ 000 \times 1,03^n = 2\ 000$, soit $1,03^n = 2$, donc en passant au ln on obtient $n \ln 1,03 = \ln 2$, soit $n = \frac{\ln 2}{\ln 1,03} \simeq 23,4$. Il devra donc attendre 20 ans pour doubler son capital avec le placement A et 24 ans avec le placement B.

Exercice 2

Les deux conditions peuvent se traduire de la façon suivante : $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = q$, et $2b - a = 3c - 2b = q$. La première relation revient à dire que $b = aq$ et $c = bq = aq^2$, d'où en remplaçant dans la deuxième donne $2aq - a = 3aq^2 - 2aq (= q)$, d'où $3aq^2 - 4aq + a = 0$, soit en factorisant par a qui est supposé non nul $3q^2 - 4q + 1 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, et admet deux racines réelles $q_1 = \frac{4+2}{6} = 1$, et $q_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3}$. Si $q = 1$, la condition $2aq - a = q$ donne $a = 1$, puis $b = aq = 1$ et $c = bq = 1$; et si $q = \frac{1}{2}$, on obtient $\frac{2}{3}a - a = \frac{1}{2}$, soit $a = -\frac{3}{2}$, puis $b = \frac{1}{3}a = -\frac{1}{2}$ et $c = \frac{1}{3}b = -\frac{1}{6}$. Les deux seules possibilités sont donc d'avoir $a = b = c = q = 1$ (auquel cas les trois termes consécutifs de la suite géométrique sont 1, 1 et 1, et les trois termes consécutifs de la suite arithmétique sont 1, 2 et 3) ; ou $q = \frac{1}{3}$, donc $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ et $c = -\frac{1}{6}$ (auquel cas les trois termes consécutifs de la suite géométrique sont $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{6}$, et les trois termes consécutifs de la suite arithmétique sont $-\frac{3}{2}$, -1 et $-\frac{1}{2}$).

Exercice 3

Notons donc $v_n = u_n + an^2 + bn + c$, alors $v_{n+1} = u_{n+1} + a(n+1)^2 + b(n+1) + c = -2u_n + n^2 - 2 + an^2 + 2an + a + bn + b + c = -2u_n + (1+a)n^2 + (2a+b)n + a + b + c - 2$. Pour que (v_n) soit géométrique, on doit avoir $v_{n+1} = qv_n = qu_n + aqn^2 + bqn + cq$. Il est nécessaire d'avoir $q = -2$, et en identifiant ensuite les coefficients des deux formules obtenues, on a $1 + a = -2a$, $2a + b = -2b$ et $a + b + c - 2 = -2c$, ce qui donne successivement $a = -\frac{1}{3}$, puis $b = -\frac{2}{3}a = \frac{2}{9}$, et enfin $c = -\frac{1}{3}(a+b-2) = \frac{19}{27}$. Avec ces valeurs, la suite (v_n) est géométrique de raison -2 et de premier terme $v_0 = u_0 + a \times 0^2 + b \times 0 + c = 2 + \frac{19}{27} = \frac{73}{27}$. Conclusion de ces magnifiques calculs : $v_n = \frac{73}{27}(-2)^n$, puis $u_n = v_n - an^2 - bn - c = \frac{73}{27}(-2)^n + \frac{1}{3}n^2 - \frac{2}{9}n - \frac{19}{27}$ (oui, je sais, beurk...).

Exercice 4

Vérifions donc que (v_n) est arithmético-géométrique : $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2u_n + 3^n}{3^{n+1}} = \frac{2u_n}{3 \times 3^n} + \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}$. La suite est donc arithmético-géométrique, il ne reste plus qu'à calculer son terme général. L'équation de point fixe associée est $x = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$, qui a pour solution $x = 1$. On introduit donc la suite auxiliaire $w_n = v_n - 1$. Verifions que cette troisième suite est géométrique : $w_{n+1} = v_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3}v_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(v_n - 1) = \frac{2}{3}w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - 1 = \frac{u_0}{3^0} - 1 = -1$. Conclusion de nos calculs : $w_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$, puis $v_n = w_n + 1 = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$, et enfin $u_n = 3^n v_n = 3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 3^n - 2^n$.

Exercice 5

Un peu d'observation (et peut-être d'habitude de manipuler ce genre de suites) conduit à s'intéresser aux deux suites suivantes : $u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) + \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n + \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n = u_n + v_n$, donc la suite $(u_n + v_n)$ (on peut lui donner un nom si on le souhaite) est constante, égale à son premier terme $u_0 + v_0 = 3$. De même, on remarque que $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n - \frac{1}{3}u_n - \frac{2}{3}v_n = \frac{1}{3}u_n - \frac{1}{3}v_n = \frac{1}{3}(u_n - v_n)$, donc la suite $(u_n - v_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $u_0 - v_0 = 1 - 2 = -1$. Conclusion, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{1}{3^n}$, soit $u_n = v_n + \frac{1}{3^n}$. Comme on sait par ailleurs que $u_n + v_n = 3$, on peut remplacer u_n pour obtenir $2v_n + \frac{1}{3^n} = 3$, soit $v_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$, puis $u_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)$.

Exercice 6

L'énoncé se traduit par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{3}{100}u_n + 1\,000 = 1,03u_n + 1\,000$ donc la suite (u_n) est arithmético-géométrique. Son équation de point fixe est $x = 1,03x + 1\,000$, ce qui donne $x = -\frac{10\,000}{3}$, qu'on notera simplement α pour alléger les calculs. En posant $v_n = u_n - \alpha$, on a donc $v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = 1,03u_n + 1\,000 - \alpha = 1,03(u_n - \alpha)$, puisque par définition $1\,000 - \alpha = -1,03\alpha$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $1,03$ et de premier terme $v_0 = u_0 - \alpha = 3\,000 - \alpha$. On en déduit que $v_n = (3\,000 - \alpha) \times 1,03^n$, puis $u_n = (3\,000 - \alpha) \times 1,03^n + \alpha$.

Notre épargnant dispose de 30 000 euros quand $(3\,000 - \alpha) \times 1,03^n + \alpha = 30\,000$, soit $1,03^n = \frac{30\,000 - \alpha}{3\,000 - \alpha}$, ou encore après passage au ln (comme à la fin de l'exercice 1), $n = \frac{\ln\left(\frac{30\,000 - \alpha}{3\,000 - \alpha}\right)}{\ln 1,03} \simeq 18,9$. L'épargnant aura donc décuplé sa mise initiale au bout de 19 ans, en ayant déposé sur cette période $19 \times 1\,000 + 3\,000 = 22\,000$ euros.

Exercice 7

La suite (v_n) est bien définie si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, ce que nous allons prouver par récurrence. Posons donc $P_n : u_n > 0$. La propriété P_0 est manifestement vraie puisque $4 > 0$. Supposons désormais P_n vraie, c'est-à-dire que $u_n > 0$. On a alors également $\sqrt{u_n} > 0$, donc $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} > 0$, ce qui prouve P_{n+1}. La suite (v_n) est donc bien définie.

Cherchons désormais à calculer v_{n+1} : $v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(2\sqrt{n}) = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln u_n = \ln 2 + \frac{1}{2}v_n$. La suite (v_n) est donc arithmético-géométrique. Son équation de point fixe est $x = \ln 2 + \frac{1}{2}x$, ce qui donne $x = 2\ln 2$. Posons donc une suite auxiliaire $w_n = v_n - 2\ln 2$, et vérifions que (w_n) est géométrique : $w_{n+1} = v_{n+1} - 2\ln 2 = \ln 2 + \frac{1}{2}v_n - 2\ln 2 = \frac{1}{2}v_n - \ln 2 = \frac{1}{2}(v_n - 2\ln 2) = \frac{1}{2}w_n$. La suite (w_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $w_0 = v_0 - 2\ln 2 = \ln(u_0) - 2\ln 2 = \ln(4) - 2\ln 2 = 0$. Finalement, la suite w_n est simplement la suite nulle, donc $v_n = w_n + 2\ln 2 = 2\ln 2$, puis $u_n = e^{v_n} = e^{2\ln 2} = 2^2 = 4$. La suite initiale était donc simplement constante, mais cette technique marche très bien en changeant la valeur initiale de u_0 en n'importe quoi d'autre de plus pénible.

Exercice 8

1. L'équation caractéristique de la suite est $x^2 - 3x + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines réelles $r = \frac{3+1}{2} = 2$ et $s = \frac{3-1}{2} = 1$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = \alpha 2^n + \beta$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $\alpha + \beta = 0$ et $2\alpha + \beta = 1$. En soustrayant les deux équations on obtient $\alpha = 1$, puis $\beta = -\alpha = -1$, donc $u_n = 2^n - 1$.
2. L'équation caractéristique de la suite est $x^2 - 6x + 9 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 36 - 36 = 0$, et admet une racine double $r = \frac{6}{2} = 3$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = (\alpha + \beta n)3^n$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $\alpha \times 3^0 = 0$ et $(\alpha + \beta) \times 3^1 = 1$. La première équation donne $\alpha = 0$, puis la deuxième donne $\beta = \frac{1}{3}$, d'où $u_n = \frac{1}{3}n3^n = n3^{n-1}$ (formule valable seulement si $n \geqslant 1$).
3. L'équation caractéristique de la suite est $2x^2 - 3x + 1 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines réelles $r = \frac{3+1}{4} = 1$ et $s = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$. La suite (u_n) a donc un terme général de la forme $u_n = \alpha + \frac{\beta}{2^n}$, avec, en utilisant les valeurs initiales, $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha + \frac{\beta}{2} = -1$. En soustrayant les deux équations on obtient $\frac{\beta}{2} = 2$, soit $\beta = 4$, puis la première équation donne $\alpha = -3$, d'où $u_n = \frac{4}{2^n} - 3$.

Exercice 9

1. Prouvons par récurrence la propriété $P_n : u_n > 2$ (ce qui prouvera au passage que (u_n) est bien définie puisqu'on aura alors toujours $u_n \neq 2$). La propriété P_0 est manifestement vraie. Supposons maintenant P_n vraie, c'est-à-dire que $u_n > 2$. On a alors $u_n - 2 > 0$, donc $\frac{1}{u_n - 2} > 0$, puis $\frac{1}{u_n - 2} + 2 > 2$, ce qui prouve P_{n+1}. Par principe de récurrence, P_n est vérifiée pour tout entier n.
2. D'après la question précédente, on a toujours $u_n - 2 > 0$, ce qui prouve la bonne définition de v_n.

3. Calculons donc $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 2) = \ln\left(\frac{1}{u_n - 2} + 2 - 2\right) = \ln\left(\frac{1}{u_n - 2}\right) = -\ln(u_n - 2) = -v_n$. La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison -1 et de premier terme $v_0 = \ln(u_0 - 2) = \ln 2$, d'où $v_n = (-1)^n \ln 2$, puis $u_n = e^{v_n} + 2 = e^{(-1)^n \ln 2} + 2$. En fait, on aura $u_n = 2 + 2 = 4$ pour toutes les valeurs paires de n, et $u_n = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$ pour toutes les valeurs impaires de n (on parle de suite périodique, comme pour les fonctions, pour une suite reprenant ainsi toujours les mêmes valeurs).

Exercice 10

Remarquons que, en décalant la relation de récurrence, $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + \cdots + 2u_0$. En soustrayant cette relation à celle donnée dans l'énoncé, on obtient $u_{n+1} - u_n = u_n + u_{n-1}$, soit $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$. C'est une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 2x - 1 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = 4 + 4 = 8$, elle admet donc deux racines réelles $r = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}$, et $s = \frac{1 - \sqrt{8}}{2} = 1 - \sqrt{2}$. Le terme général de la suite (u_n) est donc de la forme $u_n = \alpha(1 + \sqrt{2})^n + \beta(1 - \sqrt{2})^n$, avec en utilisant les deux premiers termes, $\alpha + \beta = u_0 = 1$, et $\alpha(1 + \sqrt{2}) + \beta(1 - \sqrt{2}) = u_1 = u_0 = 1$. En soustrayant les deux équations on obtient $\alpha\sqrt{2} - \beta\sqrt{2} = 0$, donc $\alpha = \beta$, ce qui en reprenant la première équation mène à $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$. Conclusion : $u_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})^n + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2})^n$ (ce n'est pas évident au premier abord, mais tous les termes de cette suite sont bel et bien entiers, malgré la présence de ces $\sqrt{2}$ dans la formule du terme général).

Exercice 11

1. Posons donc $v_n = an + b$, on a alors $v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n = a(n+2) + b - 3a(n+1) - 3b + 2an + 2b = an + 2a + b - 3an - 3a - 3b + 2an + 2b = -a$. Si on veut avoir $v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n = 3$, il suffit donc de prendre $a = -3$ (et, b pouvant être égal à n'importe quoi, autant prendre simplement $b = 0$). La suite définie par $v_n = -3n$ convient donc.
2. Si $z_n = u_n - v_n$, on a $z_{n+2} - 3z_{n+1} + 2z_n = u_{n+2} - v_{n+2} - 3u_{n+1} + 3v_{n+1} + 2u_n - 2v_n = u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n - (v_{n+2} - 3v_{n+1} + 2v_n) = 3 - 3 = 0$ puisque les deux suites (u_n) et (v_n) satisfont la récurrence initiale. La suite (z_n) est donc récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique $x^2 - 3x + 2 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, et admet deux racines réelles $r = \frac{3 - 1}{2} = 1$ et $s = \frac{3 + 1}{2} = 2$. On en déduit que $z_n = \alpha + \beta 2^n$, avec $\alpha + \beta = z_0$, et $\alpha + 2\beta = z_1$. En soustrayant les deux équations, on obtient $\beta = z_1 - z_0$, puis $\alpha = z_0 - \beta = 2z_0 - z_1$. Notons que $z_0 = u_0 - v_0 = u_0$, et $z_1 = u_1 - v_1 = u_1 + 3$. On a donc $z_n = 2u_0 - u_1 - 3 + (u_1 + 3 - u_0)2^n$, puis $u_n = z_n + v_n = 2u_0 - u_1 - 3 + (u_1 + 3 - u_0)2^n - 3n$.