# Feuilles d'exercices n°4 : Suites particulières

ECE3 Lycée Carnot

25 septembre 2009

## Exercice 1

Un classique du rire : la comparaison entre suite arithmétique et suite géométrique.

Un épargnant décide de placer 1 000 euros à la banque. On lui propose deux types de placement : le placement $A$ est un placement à intérêts simples rémunéré à 5% par an ; le placement $B$ est un placement à intérêts composés rémunéré à 3% par an. On note $(u_n)$ et $(v_n)$ les suites donnant la somme épargnée au bout de $n$ années. Déterminer la nature de $(u_n)$ et de $(v_n)$, donner la valeur de $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$, puis déterminer au bout de combien d'années le placement $B$ devient plus intéressant que le placement $A$ (vous avez les moyens de faire une résolution exacte). Déterminer pour chacun des deux placements au bout de combien d'années la somme de départ sera doublée.

## Exercice 2

Trois réels $a$, $b$ et $c$ (avec $a \neq 0$) vérifient les drôles de conditions suivantes :

- $a$, $b$ et $c$ sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q$.
- $a$, $2b$ et $3c$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $q$ (la même que ci-dessus, donc).

Déterminer les valeurs possibles de $a$, $b$, $c$ et $q$.

## Exercice 3

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -2u_n + n^2 - 2$. Déterminer trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que la suite $(v_n)$ définie par $v_n = u_n + an^2 + bn + c$ soit une suite géométrique. En déduire la valeur de $u_n$.

## Exercice 4

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$. Montrer que la suite $(v_n)$ définie par $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$ est une suite arithmético-géométrique. En déduire les valeurs de $v_n$ puis de $u_n$.

## Exercice 5

On considère deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ vérifiant $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n)$. Construire à partir de $(u_n)$ et de $(v_n)$ deux nouvelles suites de type bien connu, calculer la valeur de ces deux suites et en déduire celle de $u_n$ et de $v_n$.

## Exercice 6

Un type de placement un peu plus rigolo que ceux de l'exercice 1 :

Un épargnant place une somme de 3 000 euros sur un compte rémunéré à 3% par an à intérêts composés. Qui plus est, ce même épargnant rajoute chaque année un placement ponctuel de 1 000 euros supplémentaires sur ce même compte. On note $u_n$ la somme épargnée au bout de $n$ années. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)$, en déduire de quel type de suite il s'agit, puis déterminer la valeur de $u_n$ en fonction de $n$. Au bout de combien de temps notre épargnant disposera-t-il de 30 000 euros ? Combien aura-t-il alors déposé au total sur ce compte ?

## Exercice 7

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$. Montrer que la suite $(v_n)$ définie par $v_n = \ln u_n$ est bien définie et d'un type bien connu. Calculer $v_n$ et en déduire la valeur de $u_n$ (ne vous inquiétez pas si c'est assez moche !).

## Exercice 8

Déterminer pour chacune des suites récurrentes linéaires suivantes la valeur de $u_n$ en fonction de $n$ :

1. $u_0 = 0$ ; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_{n+1} - 2u_n$
2. $u_0 = 0$ ; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 6u_{n+1} - 9u_n$
3. $u_0 = 1$ ; $u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+1} = 3u_{n+1} - u_n$

## Exercice 9

Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 2} + 2$.

1. Montrer que $(u_n)$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.
2. On considère désormais la suite $(v_n)$ définie par $v_n = \ln(u_n - 2)$. Expliquer pourquoi $(v_n)$ est bien définie.
3. Déterminer la nature de la suite $(v_n)$.
4. En déduire la valeur de $u_n$.

## Exercice 10

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} + 2u_{n-2} + \cdots + 2u_0$. Déterminer la valeur de $u_n$ (mais si, regardez mieux, c'est une suite d'un type qu'on maitrise, il y a juste une petite modification à faire).

## Exercice 11

On cherche à déterminer toutes les suites $(u_n)$ vérifiant la récurrence non linéaire $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 3$.

1. Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que la suite $(v_n)$ définie par $v_n = an + b$ vérifie la relation ci-dessus.
2. Montrer que la suite $(z_n)$ définie par $z_n = u_n - v_n$ est alors d'un type bien connu, et en déduire la valeur de $z_n$ puis celle de $u_n$ (en fonction des premières valeurs de la suite).