Feuilles d'exercices n°3 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

25 septembre 2009

Exercice 1

1. $S_1 = \sum_{k=2}^{k=15} 3^k$
2. $S_2 = \sum_{i=1}^{i=10} \frac{i}{2^i}$
3. $S_3 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{a^k}{k}$
4. $S_4 = \sum_{i=1}^{i=25} -2i(-1)^i$

Exercice 2

1. $\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n(n+1) + n = n(n+2)$
2. $\sum_{k=945}^{k=2009} 3 = 3 \times 1\ 065 = 3\ 195$
3. $\sum_{k=1}^{k=n}(6k^2+4k+1) = 6\sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$
   $= n((n+1)(2n+1) + 2(n+1) + 1) = n(2n^2+5n+4)$
4. $\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k = \sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^{k+1} = -\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = \frac{(-1)^n - 1}{2}$
5. $\sum_{k=1}^{k=n} k(2k^2-1) = 2\sum_{k=1}^{k=n} k^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n(n+1)-1)}{2}$
   $= \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}$
6. $\sum_{k=1}^{k=18} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{k=18}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{k=18}\left(\frac{1}{3}\right)^k - 1 = \frac{1-\frac{1}{3^{19}}}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^{19}}\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{18}}\right)$
7. $\sum_{k=1}^{k=n} 3^{2k} = \sum_{k=1}^{k=n} 9^k = \sum_{k=0}^{k=n} 9^k - 1 = \frac{1-9^{n+1}}{1-9} - 1 = \frac{9^{n+1}-1}{8} - 1 = \frac{9^{n+1}-9}{8}$
8. $\sum_{k=1}^{k=n} 2^k + k^2 + 2 = \sum_{k=1}^{k=n} 2^k + \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + \sum_{k=1}^{k=n} 2 = \sum_{k=0}^{k=n} 2^k - 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n$
   $= 2^{n+1} - 2 + 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 2(2^n + n - 1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
9. $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{k=n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

Exercice 3

Pour déterminer les réels, le mieux est de partir du résultat, tout mettre au même dénominateur puis identifier : $\dfrac{a}{k-1}+\dfrac{b}{k}+\dfrac{c}{k+1} = \dfrac{ak(k+1)+b(k-1)(k+1)+ck(k+1)}{(k-1)k(k+1)} = \dfrac{ak^2+ak+bk^2-b+ck^2+ck}{k(k^2-1)}$.
En identifiant, on obtient les conditions $a+b+c=0$; $a+c=1$ et $-b=-5$, soit $b=5$ puis $a=-2$ et $c=-3$ en résolvant le petit système.

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \frac{k-5}{k(k^2-1)} = \sum_{k=2}^{k=n} \frac{-2}{k-1}+\frac{5}{k}+\frac{-3}{k+1} = -2\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k-1}+5\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k}-3\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k+1} = -2\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{k}+5\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k}-3\sum_{k=3}^{k=n+1}\frac{1}{k} = -2\sum_{k=3}^{k=n-1}\frac{1}{k}-2-1+5\sum_{k=3}^{k=n-1}\frac{1}{k}+\frac{5}{2}+\frac{5}{n}-3\sum_{k=3}^{k=n-1}\frac{1}{k}-\frac{3}{n}-\frac{3}{n+1} = -\frac{1}{2}+\frac{2}{n}-\frac{3}{n+1}$.

Exercice 4

1. C'est une somme télescopique : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{k=n}k^3 = \sum_{k=2}^{k=n+1}k^3-\sum_{k=1}^{k=n}k^3 = (n+1)^3-1$.
2. Comme $(k+1)^3 = k^3+3k^2+3k+1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3 = \sum_{k=1}^{k=n}k^3+3\sum_{k=1}^{k=n}k^2\sum_{k=1}^{k=n}k+\sum_{k=1}^{k=n}1$.
3. Reprenons le calcul de la question précédente : on a en écrivant les choses légèrement différemment $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{k=n}k^3 = 3\sum_{k=1}^{k=n}k^2+3\sum_{k=1}^{k=n}k+\sum_{k=1}^{k=n}1$, soit en utilisant le résultat de la première question $\displaystyle 3\sum_{k=1}^{k=n}k^2+3\sum_{k=1}^{k=n}k+\sum_{k=1}^{k=n}1 = (n+1)^3-1$, ou encore $\displaystyle 3\sum_{k=1}^{k=n}k^2+3\frac{n(n+1)}{2}+n = (n+1)^3-1 = n^3+3n^2+3n$.
   Faisons passer tout ce qu'on peut à droite : $\displaystyle 3\sum_{k=1}^{k=n}k^2 = n^3+3n^2+3n-\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n-n = n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n = \frac{n(2n^2+3n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$. On retrouve donc la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 5

- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij = \sum_{i=1}^{i=n} i\sum_{j=1}^{j=n} j = \sum_{i=1}^{i=n} i\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij = \sum_{j=1}^{j=n} j\sum_{i=1}^{i=j} i = \sum_{j=1}^{j=n} j\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=n} j^3+j^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{8}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$ (on peut factoriser si on le souhaite le résultat obtenu...).
- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{j=n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{i=n} i = \frac{n(n+1)}{2}\sum_{j=1}^{j=n}\frac{1}{j}$ et comme on ne sait pas calculer cette dernière somme, on est bloqués. En fait, il est plus intéressant de calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j}$ qui pour le coup donne quelque chose de complètement calculable.
- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j| = \sum_{j=1}^{j=n}\Big(\sum_{i=1}^{i=j}(j-i)+\sum_{i=j+1}^{i=n}(i-j)\Big) = \sum_{j=1}^{j=n}(j^2-\frac{j(j+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}-\frac{j(j+1)}{2}-(n-j)j) = \sum_{j=1}^{j=n}\left(j^2-(n+1)j+\frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)^2}{2}+\frac{n^2(n+1)}{2}$
  $\displaystyle = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}-(n+1)+n\right) = \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$

- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i2^j = \sum_{i=1}^{i=n} i \sum_{j=1}^{j=n} 2^j = \frac{n(n+1)}{2} \times (\sum_{j=0}^{j=n} 2^j - 1) = \frac{n(n+1)}{2} \times (2^{n+1}-1-1) = n(n+1)(2^n-1)$

Exercice 6

1. $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{k=n}\frac{k-1}{k} = \frac{\prod_{k=2}^{k=n} k-1}{\prod_{k=2}^{k=n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{k=n-1} k}{\prod_{k=2}^{k=n} k} = \frac{1}{n}$
2. $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{k=n}\frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{k=n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=2}^{k=n}(k-1)\prod_{k=2}^{k=n}(k+1)}{\left(\prod_{k=2}^{k=n}\right)^2} = \frac{\prod_{k=1}^{k=n-1} k}{\prod_{k=2}^{k=n} k} \times \frac{\prod_{k=3}^{k=n+1} k}{\prod_{k=2}^{k=n} k} =$

   $\displaystyle\frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n}(6k-3) = \prod_{k=1}^{k=n} 3(2k-1) = 3^n\prod_{k=1}^{k=n}(2k-1) = 3^n\frac{\prod_{k=1}^{k=2n} k}{\prod_{k=1}^{k=n} 2k} = 3^n\frac{(2n)!}{2^n \times n!} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{(2n)!}{n!}$

Exercice 7

1. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $2^n \leqslant n!$. Puisque l'énoncé nous indique que n doit être plus grand que 4, in itialisons pour $n = 4$: on a alors $2^4 = 16$ et $4! = 24$, donc l'inégalité est vraie. Supposons désormais P_n vérifiée, c'est-à-dire que $2^n \leqslant n!$. On peut alors en déduire que $2^{n+1} \leqslant 2n! \leqslant (n+1)n! = (n+1)!$ puisque 2 est certainement inférieur à $n+1$ quand n est plus grand que 4. La propriété P_{n+1} est donc vraie, et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 4.
2. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6. Pour $n = 1$, on a $1 \times (2+1) \times (7+1) = 24$, qui est bien divisible par 6, donc P_1 est vraie. Supposons désormais P_n vérifiée et notons pour simplifier les calculs $a_n = n(2n+1)(7n+1)$. On a alors $a_{n+1} - a_n = (n+1)(2n+3)(7n+8) - n(2n+1)(7n+1) = (2n^2+5n+3)(7n+8) - (2n^2+n)(7n+1) = 14n^3+16n^2+35n^2+40n+21n+24-14n^3-2n^2-7n^2-n = 42n^2+60n+24 = 6(7n^2+10n+4)$, donc $a_{n+1} - a_n$ est divisible par 6. or, par hypothèse de récurrence, a_n est aussi divisible par 6, donc a_{n+1} est une somme de deux nombres divisibles par 6, et il est donc lui-même divisible par 6. La propriété P_{n+1} est donc vérifiée, et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
3. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k \times k! = (n+1)! - 1$. Pour $n = 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=1} k \times k! = 1 \times 1! = 1$ et $2! - 1 = 2 - 1 = 1$, donc P_1 est vraie. Supposons désormais P_n vraie pour un certain entier n, on a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} k \times k! = \sum_{k=1}^{k=n} k \times k! + (n+1)(n+1)! = (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! = (n+1)!(1+n+1) - 1 = (n+2)! - 1$, donc P_{n+1} est vérifiée et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
4. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=2^n}\frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$. Pour $n = 0$, le membre de gauche se réduit à 1, et celui de droite vaut également 1, donc l'inégalité est vraie. Supposons désormais P_n vraie, on a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=2^{n+1}}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{k=2^n}\frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{k=2^{n+1}}\frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{n}{2} + \sum_{k=2^n+1}^{k=2^{n+1}}\frac{1}{k}$ par hypothèse de récurrence. Reste à minorer la deuxième somme : elle est constituée de 2^n termes dont le plus petit vaut $\displaystyle\frac{1}{2^{n+1}}$,

elle est donc supérieure ou égale à $2^n \times \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$, donc la somme totale est plus grande que $1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}$, ce qui prouve $P_n + 1$. Par principe de récurrence, P_n est donc vraie pour tout entier n.

Exercice 8

On calcule $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 7$, $u_4 = 15$, et ça devrait suffire à conjecturer que $u_n = 2^n - 1$. Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : u_n = 2^n - 1$. C'est vrai pour $n = 0$, et si on le suppose vérifié au rang n, alors $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$, ce qui prouve P_{n+1}. Par principe de récurrence, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$.

Exercice 9

Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$. Pour $n = 0$, $2 \times 0 + \frac{1}{3^0} = 1 = u_0$, donc P_0 est vraie. Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6) = \frac{1}{3}(2n + \frac{1}{3^n} + 4n + 6) = \frac{1}{3^{n+1}} + 2n + 2 = \frac{1}{3^{n+1}} + 2(n+1)$, ce qui prouve P_{n+1}, et par principe de récurrence, P_n est vraie pout tout entier n.

Exercice 10

On calcule $u_3 = 3 \times 2 - 3 \times 0 + 0 = 6$, $u_4 = 3 \times 6 - 3 \times 2 + 0 = 12$, $u_5 = 3 \times 12 - 3 \times 6 + 2 = 20$, $u_6 = 3 \times 20 - 3 \times 12 + 6 = 30$, et même avec un peu de motivation $u_7 = 3 \times 30 - 3 \times 20 + 12 = 42$. Si on est suffisamment réveillés, on arrive à conjecturer que $u_n = n(n-1)$ (chaque terme est le produit de l'indice par l'entier le précédent). Prouvons donc par récurrence **triple** la propriété $P_n : u_n = n(n-1)$. Il faut initialiser en vérifiant P_0, P_1 et P_2, ce qui ne pose aucun problème puisqu'on a de quoi vérifier jusqu'à P_7 grâce aux calculs précédents. Supposons désormais P_n, P_{n+1} et P_{n+2} vérifiées, on a alors $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 3(n+2)(n+1) - 3(n+1)n + (n-1)n = 3(n^2+3n+2) - 3(n^2+n) + n^2 - n = 3n^2 + 9n + 6 - 3n^2 - 3n + n^2 - n = n^2 + 5n + 6 = (n+3)(n+2)$, ce qui prouve P_{n+3}, et par principe de récurrence triple, P_n est vraie pour tout entier n.

Exercice 11

L'erreur se situe dans la preuve de l'hérédité, qui ne fonctionne pas quand n est égal à 1. En effet, dans ce cas, quand on rajoute le crayon $n+1$ et qu'on enlève le premier crayon, le dernier crayon n'est de la même couleur d'aucun autre crayon que lui-même, et les deux crayons n'ont donc aucune raison d'être de la même couleur !