Feuilles d'exercices n°3 : Sommes, produits, récurrences

ECE3 Lycée Carnot

18 septembre 2009

Exercice 1

Exprimer à l'aide du symbole Σ les expressions suivantes :

1. $S_1 = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{15}$
2. $S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{16} + \cdots + \dfrac{10}{1\ 024}$
3. $S_3 = a + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^3}{3} + \cdots + \dfrac{a^n}{n}$
4. $S_4 = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50$

Exercice 2

Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)$
2. $\displaystyle\sum_{k=945}^{k=2009} 3$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(6k^2+4k+1)$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k(2k^2-1)$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=18} \frac{1}{3^k}$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} 3^{2k}$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} 2^k + k^2 + 2$
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{k+1}}$

Exercice 3

Déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall k \geqslant 2,\ \dfrac{k-5}{k(k^2-1)} = \dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k} + \dfrac{c}{k+1}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$.

Exercice 4

Il s'agit d'une méthode alternative à celle du cours pour calculer la sommes des carrés d'entiers.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3$.
2. En développant $(k+1)^3$, exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3$ à l'aide de sommes classiques.
3. En comparant les deux calculs précédents, retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k^2$.

Exercice 5

Calculer les sommes doubles suivantes :
$\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$; $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$; $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{i}{j}$; $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|$ et $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i2^j$

Exercice 6

Calculer les produits suivants :
1. $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ 2. $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ 3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n}(6k-3)$

Exercice 7

Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $\forall n \geqslant 4,\ 2^n \leqslant n!$
2. $\forall n \geqslant 1,\ n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6.
3. $\displaystyle\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=1}^{k=n} k\times k! = (n+1)!-1$
4. $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{k=2^n} \frac{1}{k} \geqslant 1+\frac{n}{2}$

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n, puis la prouver par récurrence.

Exercice 9

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 4n + 6)$. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + \dfrac{1}{3^n}$.

Exercice 10

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n, puis la prouver par récurrence.

Exercice 11

On va prouver par récurrence sur n la propriété P_n : n crayons placés dans une trousse sont nécessairement tous de la même couleur. Pour $n = 1$, c'est vrai (s'il y a un seul crayon, tous les crayons sont bien de la même couleur), donc P_1 est vérifiée. Supposons désormais P_n vérifiée, c'est-à-dire que n crayons sont toujours de la même couleur, et essayons de prouver P_{n+1}. Prenons donc $n+1$ crayons (par exemple numérotés), et enlevons le dernier. Par hypothèse de récurrence, les n crayons restants sont de la même couleur. Remettons alors le dernier, et enlevons-en un autre, le premier par exemple. Toujours par hypothèse de récurrence, tous les crayons restants sont de la même couleur, donc le dernier crayon est en fait de la même couleur que tous les autres et P_{n+1} est prouvée. Conclusion : par principe de récurrence, quel que soit l'entier n, n crayons sont toujours de la même couleur.

Où est l'erreur ?