Feuille d'exercices n°19 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

9 mars 2010

Exercice 1 (*)

On obtient plus ou moins péniblement :

- $P+Q = 2X^3 - X^2 + 8X - 1$
- $PQ = -2X^5 + 6X^4 - 5X^3 + 16X^2 - 3X$
- $P^2 = (2X^3+5X-1)^2 = 4X^6+25X^2+1+20X^4-4X^3-10X = 4X^6+20X^4-4X^3+25X^2-10X+1$
- $P(X^2) = 2(X^2)^3 + 5(X^2) - 1 = 2X^6 + 5X^2 - 1$
- $P \circ Q = 2(-X^2+3X)^3 + 5(-X^2+3X) - 1 = -2X^6 + 18X^5 - 54X^4 + 54X^3 - 5X^2 + 15X - 1$
- $Q \circ P = -(2X^3+5X-1)^2 + 3(2X^3+5X-1) = -(4X^6+20X^4-4X^3+25X^2-10X+1) + 6X^3+15X-3 = -4X^6-20X^4+10X^3-25X^2+25X-4$
- $3P^3Q - Q \circ P^2 = 3(2X^3+5X-1)^3(-X^2+3X) + (4X^6+20X^4-4X^3+25X^2-10X+1)^2 - 3(4X^6+20X^4-4X^3+25X^2-10X+1)$
  $= (8X^9+125X^3-1+60X^7+150X^5-12X^6+6X^3-75X^2+15X-60X^4)(-3X^2+9X) + (16X^{12}+400X^8+16X^6+625X^4+100X^2+1+160X^{10}-32X^9+200X^8-80X^7+8X^6-160X^7+1\,000X^6-400X^5+40X^4-200X^5+80X^4-8X^3-500X^3+50X^2-20X) - 12X^6 - 60X^4+12X^3-75X^2+30X-3$
  $= (8X^9+60X^7-12X^6+150X^5-60X^4+131X^3-75X^2+15X-1)(-3X^2+9X) + 16X^{12} + 160X^{10}-32X^9+600X^8-240X^7+1\,012X^6-600X^5+685X^4-496X^3+75X^2+10X-2$
  $= (-24X^{11}+72X^{10}-180X^9+540X^8+36X^8-108X^7-450X^7+1\,350X^6+180X^6-540X^5-393X^5+1\,179X^4+225X^4-675X^3-45X^3+135X^2+3X^2-9X) + 16X^{12}+160X^{10}-32X^9+600X^8-240X^7+1\,012X^6-600X^5+685X^4-496X^3+75X^2+10X-2$
  $= 16X^{12}-24X^{11}+232X^{10}-212X^9+1\,176X^8-798X^7+2\,542X^6-1\,533X^5+2\,089X^4-1\,216X^3+213X^2+X-2$
  Calcul garanti fait main, et tout de même (j'avoue) vérifié ensuite à la machine, il y avait une toute petite erreur...

Exercice 2 (*)

Si on développe le polynôme P à l'aide de la formule du binôme (mais si, un peu de courage), on obtient $P(X) = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} 2^{n-k} X^k - \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} 3^{n-k} X^k = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} (2^{n-k} - 3^{n-k}) X^k$. Or, $2^{n-k} - 3^{n-k}$ vaut 0 lorsque $k = n$ (mais ne s'annule jamais pour les autres valeurs de k. Le polynôme P est donc en fait de degré $n-1$, et de coefficient dominant $\binom{n}{n-1}(2^{n-1} - 3^{n-1}) = n(2^{n-1} - 3^{n-1})$.

Le polynôme Q est un produit de $n+1$ polynômes de degré 1, il est donc de degré $n+1$. Son coefficient dominant vaut 2^{n+1} (on l'obtient simplement en faisant le produit des coefficients dominants de tous les facteurs).

Le polynôme R est un produit de $n+1$ polynômes, dont l'un est un polynôme constant (pour $k = 0$) et tous les autres sont de degré 1 ; il est donc de degré n. Son coefficient dominant vaut 1.

Exercice 3 (* à ***)

1. Le polynôme P est donc factorisable par $X-1$ et par $X-2$, c'est-à-dire que $P=(X-1)(X-2)Q$, avec $Q \in \mathbb{R}[X]$.
2. Il suffit de constater que les deux conditions données reviennent à dire que $P(X)-X$ vérifie les conditions de la question 1. Autrement dit, on a $P(X)-X=(X-1)(X-2)Q(X)$, soit $P(X)=X+(X-1)(X-2)Q(X)$, avec toujours $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$.
3. Si $P(X)=\sum_{k=0}^{k=n} a_k X^k$, on aura $P'(X)=\sum_{k=1}^{k=n} k a_k X^{k-1}$, donc $XP'(X)=\sum_{k=1}^{k=n} k a_k X^k$. Par identification, on aura $XP'=P$ si $a_0=0$ et, $\forall k \in \{1;\dots;n\}$, $a_k=ka_k$. Autrement dit, a_1 peut valoir n'importe quoi, mais tous les autres coefficients doivent être nuls. Celà revient à dire que P est de la forme $P=aX$, avec $a \in \mathbb{R}$.
4. Constatons pour commencer que le polynôme nul et solution de l'équation proposée. Intéressons-nous ensuite au degré d'un polynôme P vérifiant la condition demandée : si le terme dominant de P est de la forme $a_n X^n$ (avec $a_n \neq 0$), alors celui de P'' sera $n(n-1)a_n X^{n-2}$, donc celui de $(X^2+1)P''$ sera égal à $n(n-1)a_n X^n$ (tous les autres termes étant de degré inférieur). L'égalité demandée implique donc en particulier que $n(n-1)a_n X^n = 6a_n X^n$, c'est-à-dire que $n(n-1)=6$, ou encore $n^2-n-6=0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta=1+24=25$, et admet deux solutions $n_1=\dfrac{1-5}{2}=-2$ et $n_2=\dfrac{1+5}{2}=3$. Le degré d'un polynôme pouvant difficilement être égal à -2, notre P est donc de degré 3. Autrement dit, $P=aX^3+bX^2+cX+d$, donc $P''=6aX+2b$, et $(X^2+1)P''=6aX^3+2bX^2+6aX+2b$. Par identification, les coefficients du polynôme P doivent vérifier $6a=6a$; $6b=2b$; $6c=6a$ et $6d=2b$. On en déduit que $b=d=0$, et $c=a$, a pouvant valoir n'importe quoi. Autrement dit, $P=a(X^3+X)$, avec $a \in \mathbb{R}$
5. On peut constater à l'aide des deux premières conditions, de façon similaire à ce que nous avions fait au 2, que $P(X)-X$ admet 0 et 1 pour racines, et peut donc s'écrire sous la forme $X(X-1)Q(X)$. Autrement dit, on a $P(X)=X+X(X-1)Q(X)$. On en déduit que $P'(X)=1+(X-1)Q(X)+XQ(X)+X(X-1)Q'(X)=1+(2X-1)Q(X)+X(X-1)Q'(X)$. Les deux dernières conditions peuvent alors s'exprimer sous la forme $P'(0)=1-Q(0)=2$, et $P'(1)=1+Q(1)=3$, donc $Q(0)=-1$ et $Q(1)=2$. Le polynôme $3X-1$ prenant respectivement les valeurs -1 en 0 et 2 en 1, on peut constater que $Q(X)-(3X-1)$ a pour racines 0 et 1, autrement dit que $Q(X)=3X-1+X(X-1)R(X)$. En reprenant l'expression précédente de P, on obtient donc $P(X)=X+X(X-1)(3X-1+X(X-1)R(X))=X+(X^2-X)(3X-1)+X^2(X-1)^2R(X)=2X-4X^2+3X^3+X^2(X-1)^2R(X)$, avec $R \in \mathbb{R}[X]$. Une autre façon de voir les choses est de dire que les conditions données imposent que le reste de la division euclidienne de P par $X^2(X-1)^2$ soit égal à $2X-4X^2+3X^3$.

Exercice 4 (**)

1. Il y a une racine très évidente qui est 1. On peut aussi constate (par exemple en jetant un oeil à l'énoncé de la question suivante) que -2 est racine de P : $P(-2)=-8-2\times4-5\times(-2)+6=0$.
2. On peut donc factoriser P sous la forme $P(X)=(X+2)Q(X)=(X+2)(aX^2+bX+c)=aX^3+(2a+b)X^2+(2b+c)X+2c$. Par identification, on obtient $a=1$; $2a+b=-2$; $2b+c=-5$ et $2c=6$, donc $a=1$; $b=-4$ et $c=3$, soit $P(X)=(X+2)(X^2-4X+3)$.
3. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta=16-12=4$ et pour racines $x_1=\dfrac{4-2}{2}=1$ (tiens, on a retrouvé notre autre racine évidente) et $x_2=\dfrac{4+2}{2}=3$. On a donc $P(X)=(X+1)(X-1)(X-3)$, d'où le tableau de signes suivant :

x		-2		1		3	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

4. La première inéquation se ramène au tableau de signe précédent en posant $X = \ln x$. On en déduit que $X \in]-2;1[\cup]3;+\infty[$, donc $\mathcal{S} =]e^{-2};e[\cup]e^3;+\infty[$. Pour la deuxième, on peut tout multiplier par e^x (qui est toujours strictement positif) et tout passer à gauche pour obtenir $e^{3x} - 2e^{2x} - 5e^x + 6 \leqslant 0$, ce qui se ramène encore une fois au tableau précédent en posant cette fois-ci $X = e^x$ (ce qui suppose donc $X > 0$). On obtient $X \in [1;3]$ (on peut oublier l'autre intervalle puisque $X \geqslant 0$, soit $\mathcal{S} = [0;\ln 3]$.

Exercice 5 (**)

Le polynôme P a pour racine évidente -1 : $P(-1) = 1 - 3 - 6 + 8 = 0$, donc P est factorisable par $X+1$: $P(X) = (X+1)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (a+b)X^2 + (b+c)X + c$. Par identification, on obtient $a = -1$; $a + b = -3$; $b + c = 6$ et $c = 8$, soit $a = -1$; $b = -2$ et $c = 8$. On a donc $P(X) = (X+1)(-X^2-2X+8)$. Le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 4+32 = 36$, donc admet deux racines $x_1 = \dfrac{2-6}{-2} = 2$, et $x_2 = \dfrac{2+6}{-2} = -4$. On en déduit que $P(X) = -(X+1)(X-2)(X+4)$, d'où le tableau de signes suivant :

x		-4		-1		2	
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Le polynôme Q a pour racines évidente 2 : $Q(2) = 8 - 24 + 26 - 10 = 0$, donc $Q(2) = (X-2)(aX^2 + bX + c) = aX^3 + (b-2a)X^2 + (c-2b)X - 2c$. Par identification, $a = 1$; $b - 2a = -6$; $c - 2b = 13$ et $-2c = -10$, soit $a = 1$; $b = -4$ et $c = 5$. On a donc $Q(X) = (X-2)(X^2 - 4X + 5)$. le deuxième facteur a pour discriminant $\Delta = 16 - 20 = -4$, donc ledit facteur est toujours positif, et on a le tableau de signes suivant :

x		2	
$P(x)$	$-$	0	$+$

Exercice 6 (* à **)

1.

$$\begin{array}{cccccccc|l}
 & 3X^3 & - & 5X^2 & + & X & + & 2 & \quad X-2 \\ \cline{9-9}
- & (3X^3 & - & 6X^2) & & & & & 3X^2+X+3 \\
 & & & X^2 & + & X & + & 2 & \\
 & & - & (X^2 & - & 2X) & & & \\
 & & & & & 3X & + & 2 & \\
 & & & & - & (3X & - & 6) & \\
 & & & & & & & 8 &
\end{array}$$

Conclusion : $3X^3 - 5X^2 + X + 2 = (X-2)(3X^2 + X + 3) + 8$.

2.

$$\begin{array}{cccccccccc|l}
- & 5X^4 & + & 4X^3 & + & 6X^2 & & & + & 1 & \quad X^2-5X+3 \\ \cline{11-11}
- & (-5X^4 & + & 25X^3 & - & 15X^2) & & & & & -5X^2-21X-84 \\
 & & - & 21X^3 & + & 21X^2 & & & + & 1 & \\
 & & - & (-21X^3 & + & 105X^2 & - & 63X) & & & \\
 & & & & - & 84X^2 & + & 63X & + & 1 & \\
 & & & & - & (-84X^2 & + & 420X & - & 252) & \\
 & & & & & & - & 357X & + & 253 &
\end{array}$$

Conclusion : $-5X^4+4X^3+6X^2+1=(X^2-5X+3)(-5X^2-21X-84)-357X+253$ (eh oui, parfois, les résultats sont ignobles).

3.

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrr|l}
 & X^5 & - & 7X^4 & & & - & X^2 & - & X & + & 9 & X^2-5X+4 \\ \cline{13-13}
- & (X^5 & - & 5X^4 & + & 4X^3) & + & X^2) & & & & & X^3-2X^2-14X-63 \\
 & & - & 2X^4 & - & 4X^3 & - & X^2 & - & X & + & 9 & \\
 & & - & (-2X^4 & + & 10X^3 & - & 8X^2) & & & & & \\
 & & & & - & 14X^3 & + & 7X^2 & - & X & + & 9 & \\
 & & & & - & (-14X^3 & + & 70X^2 & - & 56X) & & & \\
 & & & & & & - & 63X^2 & + & 55X & + & 9 & \\
 & & & & & & - & (-63X^2 & + & 315X & - & 252) & \\
 & & & & & & & & - & 260X & + & 261 &
\end{array}$$

Conclusion : $X^5-7X^4-X^2-X+9=(X^2-5X+4)(X^3-2X^2-14X-63)-260X+261$

4. C'est évident le piège idiot de la liste : on ne peut pas faire de division euclidienne si on ne connait pas la valeur de n, mais la division est en fait déjà écrite sous nos yeux en factorisant la première moitié de P par X^n : $X^{n+2}-3X^n+2X+3=X^n(X^2-3)+2X+3$. Comme le degré de $2X+3$ est strictement inférieur à celui de X^2-3, on a bien effectué la division souhaitée.

Exercice 7 (* à ***)

1. En posant $Y=X^2$, on cherche d'abord à factoriser $2Y^2-3Y-2$, trinôme de discriminant $\Delta=9+16=25$, admettant pour racines $Y_1=\dfrac{3-5}{4}=-\dfrac{1}{2}$ et $Y_2=\dfrac{3+5}{4}=2$. On en déduit que $2Y^2-3Y-2=2\left(Y+\dfrac{1}{2}\right)(Y-2)=(2Y+1)(Y-2)$, et ensuite que $P(X)=(2X^2+1)(X^2-2)=(2X^2+1(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})$ (le premier facteur ne peut pas se factoriser plus puisqu'il n'a pas de racine).
2. On pourrait avoir envie de poser $Y=X^4$ et procéder comme précédemment, mais un gros souci apparait rapidement : le trinôme obtenu n'a pas de racine. En fait, c'est pire que ça : on sait dès le départ que le polynôme de degré 8 initial n'a pas de racine puisqu'il est toujours strictement positif. Il est néanmoins factorisable (ce n'est pas contradictoire, il ne faut simplement pas s'attendre à obtenir des facteurs de degré 1) en étant un peu (beaucoup ?) astucieux : $P(X)=X^8+X^4+1=(X^8+2X^4+1)-X^4=(X^4+1)^2-(X^2)^2$. On reconnait maintenant une différence de deux carrés, qu'on sait factoriser : $P(X)=(X^4+X^2+1)(X^4-X^2+1)$. Chacun des deux facteurs peut à nouveau se factoriser en utilisant la même technique (encore une fois, pas de méthode plus simple) : $X^4+X^2+1=(X^2+1)^2-X^2=(X^2+X+1)(X^2-X+1)$; et $X^4-X^2+1=(X^2+1)^2-3X^2=(X^2+1)^2-(\sqrt{3}X)^2=(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)$. Finalement, on obtient la factorisation suivante pour P : $P(X)=(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)$ (comme prévu, aucun de ces quatre trinômes n'admet de racine, on ne peut donc pas factoriser plus).
3. Commençons par poser $Y=X^3$ et cherchons à factoriser Y^3+Y^2+Y+1. Il y a une racine évidente qui est -1, on peut donc écrire $Y^3+Y^2+Y+1=(Y+1)(aY^2+bY+c)=aY^3+(a+b)Y^2+(b+c)Y+c$. Par identification on a $a=1$; $a+b=1$; $b+c=1$ et $c=1$, donc $a=c=1$ et $b=0$. Autrement dit, $Y^3+Y^2+Y+1=(Y+1)(Y^2+1)$. Le deuxième facteur ne risque pas de se factoriser plus, on a donc $P(X)=(X^3+1)(X^6+1)$. Le premier facteur, Y^3+1, a pour racine évidente -1 (encore une fois), donc se factorise par $X+1$. Une autre façon de voir les chose est d'utiliser l'identité remarquable vue en cours : $X^3+1=X^3-(-1)^3=(X+1)(X^2-X+1)$. Le trinôme X^2-X+1 a un discriminant négatif, on ne peut pas le factoriser. Reste à s'occuper du facteur X^6+1, pour lequel on ne risque pas de

trouver de racines puisqu'il est toujours positif. On peut utiliser la même astuce que ci-dessus : $X^6+1=(X^2)^3-(-1)^3=(X^2+1)(X^4-X^2+1)$. Le facteur X^2+1 n'admet toujours pas de racine et n'est pas factorisable, et si vous avez suivi les calculs de la question 2 de ce même exercice, vous savez déjà que $X^4-X^2+1=(X^2+\sqrt{3}X+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)$. Conclusion de tous ces calculs : $X^9+X^6+X^3+1=(X+1)(X^2-X+1)(X^2+1)(X^2-\sqrt{3}X+1)(X^2+\sqrt{3}X+1)$.

4. Celui-là est rapide si on pense à utiliser l'identité remarquable $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ (on ne vous a pas mis $P(X)$ sous cette forme-là pour rien !) : $P(X)=(1+X)^3+8X^3=(1+X)^3-(-2X)^3=(1+X+2X)((1+X)^2-2X(1+X)+4X^2)=(1+3X)(1+2X+X^2-2X-2X^2+4X^2)=(1+3X)(3X^2+1)$. On ne peut pas factoriser plus que cela.

Exercice 8 (**)

Un polynôme de degré 3 est de la forme $P=aX^3+bX^2+cX+d$, on a donc dans ce cas $P(X+1)-P(X)=a(X+1)^3+b(X+1)^2+c(X+1)+d-(aX^3+bX^2+cX+d)=3aX^2+3aX+a+2bX+b+c$. Par identification, on aura $P(X+1)-P(X)=X^2$ si $3a=1$; $3a+2b=0$ et $a+b+c=0$, soit $a=\frac{1}{3}$; $b=-\frac{3}{2}a=-\frac{1}{2}$ et $c=-a-b=\frac{1}{6}$ (et d peut être pris comme on le souhaite, on posera par exemple $d=0$). Un polynôme satisfaisant est donc $P=\frac{1}{3}X^3-\frac{1}{2}X^2+\frac{1}{6}X$. En exploitant l'égalité $P(k+1)-P(k)=k^2$ (valable pour tout entier k), on peut en déduire que $\sum_{k=0}^{k=n}k^2=\sum_{k=0}^{k=n}P(k+1)-P(k)=P(n+1)-P(0)$ (c'est une somme télescopique. Comme $P(0)=0$ et $P(n+1)=\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}(n+1)=\frac{(n+1)(2(n+1)^2-3(n+1)+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+4n+2-3n-3+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+n)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on retrouve une formule bien connue depuis quelques mois désormais.

Pour la deuxième partie de l'exercice, le principe est le même, mais en partant d'un polynôme de degré 5 (d'où les calculs un peu plus compliqués). Posons donc $P=aX^5+bX^4+cX^3+dX^2+eX+f$, alors (en révisant au passage notre triangle de Pascal) on a $P(X+1)-P(X)=a(X+1)^5+b(X+1)^4+c(X+1)^3+d(X+1)^2+e(X+1)+f-(aX^5+bX^4+cX^3+dX^2+eX+f)=5aX^4+10aX^3+10aX^2+5aX+a+4bX^3+6bX^2+4bX+b+3cX^2+3cX+1+2dX+d+e=5aX^4+(10a+4b)X^3+(10a+6b+3c)X^2+(5a+4b+3c+2d)X+a+b+c+d+e$. Par identification, tout ceci sera égal à X^4 si $5a=1$; $10a+4b=0$; $10a+6b+3c=0$; $5a+4b+3c+2d=0$ et $a+b+c+d+e=0$ (et on peut prendre par exemple f égal à 0), soit $a=\frac{1}{5}$; $b=-\frac{5}{2}a=-\frac{1}{2}$; $c=-\frac{2}{3}b=\frac{1}{3}$ (puisque $10a+4b=0$, on a $2b+3c=0$) ; $d=-\frac{1}{2}(5a+4b+3c)=-\frac{1}{2}(1-2+1)=0$, et enfin $e=-a-b-c-d=-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{-6+15-10}{30}=-\frac{1}{30}$. On obtient donc $P(X)=\frac{1}{5}X^5-\frac{1}{2}X^4+\frac{1}{3}X^3-\frac{1}{30}X$, puis de manière similaire à ce qu'on a fait dans la première partie de l'exercice $\sum_{k=0}^{k=n}k^4=P(n+1)=\frac{(n+1)^5}{5}-\frac{(n+1)^4}{2}+\frac{(n+1)^3}{3}-\frac{n+1}{30}=\frac{(n+1)(6(n+1)^4-15(n+1)^3+10(n+1)^2-1)}{30}=\frac{(n+1)(6n^4+24n^3+36n^2+24n+6-15n^3-45n^2-45n-15+10n^2+20n+10-1)}{30}=\frac{(n+1)(6n^4+9n^3+n^2-n))}{30}=\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$. Le dernier gros facteur ne se factorise pas de façon immédiate, mais les plus curieux d'entre vous pourront constater que $-\frac{1}{2}$ en est une racine : $6\left(-\frac{1}{2}\right)^3+9\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}-1=-6\times\frac{1}{8}+\frac{9}{4}-\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{4}+\frac{9}{4}-\frac{2}{4}-\frac{4}{4}=0$. On en déduit que $6n^3+9n^2+n-1 = \left(n+\frac{1}{2}\right)(an^2+bn+c) = an^3+\left(b+\frac{1}{2}a\right)n^2+\left(c+\frac{1}{2}b\right)n+\frac{1}{2}c$. Par identification, on obtient $a=6$; $b+\frac{1}{2}a=9$; $c+\frac{1}{2}b=1$ et $\frac{1}{2}c=-1$; soit $a=6$; $b=6$ et $c=-2$. On a donc $6n^3+9n^2+n-1=\left(n+\frac{1}{2}\right)(6n^2+6n-2)=(2n+1)(3n^2+3n-1)$ (remarquez que le facteur $2n+1$ déjà présent pour la formule de la somme des carrés refait ici son apparition). Reste encore à factoriser le dernier terme si on le souhaite. Il a pour discriminant $\Delta=9+12=21$, et admet donc deux racines $n_1=\frac{-3-\sqrt{21}}{3}$ et $n_2=\frac{-3+\sqrt{21}}{3}$. ces deux racines étant assez peu sympathiques, on préfèrera garder la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{k=n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Exercice 9 (***)

Dire que $(X-1)^2$ divise $P-1$ revient à dire que 1 est une racine double de $P-1$ (c'est du cours), autrement dit que $(P-1)(1)=0$ et $(P-1)'(1)=0$. Plus simplement, cela revient à dire que $P(1)=1$ et $P'(1)=0$ (la dérivée de $P-1$ étant P'). De même, dire que $(X+1)^2$ divise $P+1$ revient à dire que -1 est racine double de $P+1$, donc $P(-1)=-1$ et $P'(-1)=0$. Le polynôme P' étant le polynôme dérivé d'un polynôme de degré 3, il est de degré 2. Comme on lui connait deux racines 1 et -1, il est donc nécessairement de la forme $P'(X)=a(X-1)(X+1)=aX^2-a$, avec $a\in\mathbb{R}$. Un peu d'anticipation sur le chapitre d'intégration permet alors d'affirmer que $P(X)=\frac{a}{3}X^3-aX+b$, où a et b sont deux réels. Reprenonns maintenant les deux conditions connues sur P : on sait que $P(1)=1$, donc $\frac{a}{3}-a+b=1$, et $P(-1)=-1$, donc $-\frac{a}{3}+a+b=-1$. On obtient $b=0$ en additionnant les deux équations, donc elles se réduisent toutes deux à $\frac{a}{3}-a=1$, soit $a=-\frac{3}{2}$. Conclusion $P(X)=-\frac{1}{2}X^3+\frac{3}{2}X$.

Exercice 10 (***)

Commençons par constater qu'un tel polynôme est nécessairement de degré n : en effet, P' est toujours de degré strictement inférieur à P, donc $P'-P$ est toujours de même degré que P. posons alors $P=\sum_{k=0}^{k=n} a_kX^k$. On a donc $P'=\sum_{k=1}^{k=n} ka_kX^{k-1}$, et $P'-P=-a_nX^n+\sum_{k=0}^{k=n-1}((k+1)a_{k+1}-a_k)X^k$. Pour avoir $P'-P=X^n$, il faut donc avoir $a_n=-1$ et, $\forall k\leqslant n-1$, $a_k=(k+1)a_{k+1}$, ou encore si on préfère, $\forall k\in\{1,\dots,n\}$, $a_{k-1}=ka_k$. On a donc $a_{n-1}=-n$, puis $a_{n-2}=-n(n-1)$, etc. Plus géralement, on aura $a_k=-n(n-1)\dots(n-k+1)=-\frac{n!}{k!}$, donc $P=-\sum_{k=0}^{k=n}\frac{n!}{k!}X^k$ (naturellement, une petite récurrence pour déterminer la valeur des coefficients ne nuirait pas à la riguer de l'argumentation).