Feuilles d'exercices n° 19 : Polynômes

ECE3 Lycée Carnot

17 février 2010

Exercice 1 (*)

Soit P et Q les deux polynômes définis par $P(X) = 2X^3+5x-1$ et $Q(X) = -X^2+3X$. Déterminer chacun des polynômes suivants : $P+Q$; PQ ; $P^2(X)$; $P(X^2)$; $P \circ Q$; $Q \circ P$; $3P^3Q - Q \circ P^2$.

Exercice 2 (*)

Déterminer le degré et le coefficient dominant de chacun des polynômes suivants : $P(X) = (X+2)^n - (X+3)^n$; $Q(X) = \prod_{k=0}^{k=n}(2X-k)$; $R(X) = \prod_{k=0}^{k=n}(X-2)^k$.

Exercice 3 (* à ***)

Déterminer tous les polynômes réels vérifiant chacune des conditions suivantes :

1. $P(1) = 0$ et $P(2) = 0$
2. $P(1) = 1$ et $P(2) = 2$
3. $XP' = P$
4. $(X^2+1)P'' = 6P$
5. $P(0)0$; $P(1) = 1$; $P'(0) = 2$ et $P'(1) = 3$.

Exercice 4 (**)

Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

1. Déterminer une racine évidente du polynôme P.
2. Factoriser P sous la forme $(X+2)Q(X)$, où Q est un polynôme de degré 2.
3. En déduire le tableau de signe de P sur $\mathbb{R}$.
4. Résoudre les inéquations $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 - 5\ln x + 6 > 0$ et $e^{2x} - 2e^x \leqslant 5 - 6e^{-x}$

Exercice 5 (**)

Factoriser les polynômes suivants et dresser leur tableau de signe sur $\mathbb{R}$: $P(X) = -X^3 - 3X^2 + 6X + 8$; $Q(X) = X^3 - 6X^2 + 13X - 10$.

Exercice 6 (* à **)

Dans chacun des cas suivants, effectuer la division euclidienne de P par Q.

1. $P(X) = 3X^3 - 5X^2 + X + 2$ et $Q(X) = X - 2$
2. $P(X) = 1 + 6X^2 + 4X^3 - 5X^4$ et $Q(X) = X^2 - 5X + 3$.
3. $P(X) = X^5 - 7X^4 - X^2 - X + 9$ et $Q(X) = X^2 - 5X + 4$.
4. $P(X) = X^{n+2} - 3X^n + 2X + 3$ et $Q(X) = X^2 - 3$.

Exercice 7 (* à ***)

Factoriser le plus possible chacun des polynômes suivants :

1. $P(X) = 2X^4 - 3X^2 - 2$
2. $P(X) = X^8 + X^4 + 1$
3. $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$
4. $P(X) = (1 + X)^3 + 8X^3$

Exercice 8 (**)

Déterminer un polynôme P de degré 3 vérifiant $P(X+1) - P(X) = X^2$. En déduire une nouvelle façon de prouver la formule bien connue pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k^2$.

En utilisant une méthode similaire, déterminer une jolie formule pour $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} k^4$ (attention, il y a du calcul en perspective).

Exercice 9 (***)

Déterminer tous les polynômes P de degré 3 tels que $(X-1)^2$ divise $P - 1$ et $(X+1)^2$ divise $P + 1$.

Exercice 10 (***)

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique polynôme P vérifiant $P' - P = X^n$, et exprimer ses coefficients à l'aide de factorielles.