

# Feuilles d'exercices n° 18

ECE3 Lycée Carnot

5 février 2010

## Exercice 1 (\*)

Soient  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$  et  $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

Calculer tous les produits de deux matrices possibles à l'aide de ces matrices.

## Exercice 2 (\*)

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^p$  pour toute valeur de  $p \in \mathbb{N}$ .

## Exercice 4 (\*\*)

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Déterminer toutes les matrices dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  qui commutent avec  $A$ .

## Exercice 5 (\*\*)

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer toutes les matrices  $B$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $AB = 0$ .
2. Déterminer toutes les matrices  $C$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $AC = CA = 0$ .

## Exercice 6 (\*\*)

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Écrire  $A$  sous la forme  $I_4 + B$ , où  $B$  est une matrice nilpotente, et

en déduire l'expression de  $A^p$ . Écrire explicitement la matrice  $A^{10}$ .

## Exercice 7 (\*\*\*)

Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & a & a \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  ( $a \in \mathbb{R}$ ). Montrer que  $(A + I)^3 = 0$ . En déduire l'expression de  $A^p$ .

### Exercice 8 (\*\*\*)

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ . Montrer qu'il existe une suite de réels  $(a_p)$  telle que  $A^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_p & 1 - 2a_p & 2a_p \\ a_p & -a_p & a_p + 1 \end{pmatrix}$ .  
Calculez  $a_p$  et en déduire  $A^p$ .

### Exercice 9 (\*\*\*)

Soit  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $A^3 = 6A - A^2$ .
2. Montrer qu'il existe deux suites  $a_k$  et  $b_k$  telles que  $A^k = a_k A^2 + b_k A$  (pour  $k \geq 2$ ).
3. Trouver des relations de récurrence pour  $a_k$  et  $b_k$  et en déduire leurs valeurs.
4. En déduire l'expression de  $A^k$ . Reste-t-elle valable pour  $k = 0$  et pour  $k = 1$  ?

### Exercice 10 (\*\*\*)

Soit  $A$  la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $A^2$  et  $A^3$  et en déduire les puissances de  $A$ .
2. On pose  $B = 2I + A$ . Déterminer les puissances de la matrice  $B$ .
3. Soient  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  et  $(c_n)$  les suites définies pour  $n \geq 1$  par 
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ b_n = 2a_n + 2b_n \\ c_n = b_n + 2c_n \end{cases}.$$
Déterminer les valeurs prises par ces suites en fonction de  $n$ ,  $a_1$ ,  $b_1$  et  $c_1$  (utilisez les questions précédentes).

### Exercice 11 (\*\*\*)

La trace d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , notée  $Tr(A)$  est la somme de ses coefficients diagonaux.

1. Montrer que,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$ .
2. Montrer que, si  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées de même taille,  $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$ .
3. Sous les mêmes hypothèses, montrer que  $Tr(AB) = Tr(BA)$ .
4. Montrer qu'il n'existe pas de matrices  $A$  et  $B$  vérifiant  $AB - BA = I$ .

### Exercice 12 (\*\*\*)

Soit  $a$  un nombre réel et  $M_a = \begin{pmatrix} 1 - 2a & a & a \\ a & 1 - 2a & a \\ a & a & 1 - 2a \end{pmatrix}$ .

1. Déterminer le réel non nul  $a_0$  pour lequel  $M_{a_0}^2 = M_{a_0}$ .
2. On pose  $P = M_{a_0}$  et  $Q = I - P$ . Montrer qu'il existe un réel  $\alpha$  tel que  $M_a = P + \alpha Q$ .
3. Calculer  $P^2$ ,  $Q^2$ ,  $PQ$  et  $QP$ .
4. Calculer  $M_a^k$ .