Feuille d'exercices n°21 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

25 mars 2010

Exercice 1 (*)

Le nombre X de lancers réussis suit une loi binomiale de paramètre $(n = 10; p = 0.7)$. On a donc $P(X = k) = \binom{10}{k}(0.7)^k(0.3)^{10-k}$ et $E(X) = np = 7$. La probabilité de n'avoir aucun lancer réussi sur q tentatives vaut 0.3^q. Elle passe en-dessous de 2% lorsque $0.3^q \leqslant 0.02$, soit $q \ln 0.3 \leqslant \ln 0.02$, donc $q \geqslant \dfrac{\ln 0.02}{\ln 0.3} \simeq 3.25$. Il suffit donc de quatre lancers pour avoir plus de 98% de chance qu'un lancer au moins réussisse.

Exercice 2 (*)

1. Il s'agit de l'exemple standard de loi hypergéométrique. Ici le paramètre de R est $\left(15; 6; \dfrac{2}{3}\right)$ (nombre total de boules ; nombre de tirages ; proportion de boules rouges). On a donc (si $1 \leqslant k \leqslant 6$, sinon la probabilité est nulle) $P(R = k) = \dfrac{\binom{10}{k}\binom{5}{6-k}}{\binom{5}{15}}$; $E(R) = 6 \times \dfrac{2}{3} = 4$ et $V(R) = 6 \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{15-6}{15-1} = \dfrac{6}{7}$. Pour V, on utilise par exemple que $V = 6 - R$, donc $P(V = k) = P(R = 6 - k)$; $E(V) = 6 - 4 = 2$ et $V(V) = V(R) = \dfrac{6}{7}$.
2. Cette fois-ci, on a une loi binomiale de paramètre $\left(6; \dfrac{2}{3}\right)$. On a donc $P(R = k) = \dbinom{6}{k}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k \dfrac{1}{3^{n-k}} = \dbinom{6}{k}\dfrac{2^k}{3^n}$; $E(R) = 4$ et $V(R) = 6 \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$.
3. On a $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ puisqu'on tirera forcément une boule rouge au sixième tirage si on n'a pas eu avant. Sans difficulté, on calcule à l'aide de la formule des probabilités composées $P(X = 1) = \dfrac{2}{3}$; $P(X = 2) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{10}{14} = \dfrac{5}{21}$; $P(X = 3) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{4}{14} \times \dfrac{10}{13} = \dfrac{20}{273}$; $P(X = 4) = \dfrac{1}{3}\dfrac{4}{14} \times \dfrac{3}{13} \times \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{273}$; $P(X = 5) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{4}{14} \times \dfrac{3}{13} \times \dfrac{2}{12} \times \dfrac{10}{11} = \dfrac{10}{3003}$ et $P(X = 6) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{4}{14} \times \dfrac{3}{13} \times \dfrac{2}{12} \times \dfrac{1}{11} = \dfrac{1}{3003}$ (pour les curiex, cela donne une espérance $E(X) \simeq 1.42$).

Exercice 3 (**)

On a $X(\Omega) = \{0; 1; 2; \dots; n\}$, et $P(X = k) = \dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. D'après le théorème du transfert, on a donc $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}\frac{p^k(1-p)^{n-k}}{1+k}$. On aimerait bien se débarasser du $k+1$ au dénominateur, ça tombe bien puisque $\dfrac{1}{k+1}\dbinom{n}{k} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{n+1}{k+1}$. On a donc $E(Y) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n+1}{k+1}p^k(1-$

$p)^{n-k} = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{j=1}^{j=n+1} \binom{n+1}{j} p^{j-1}(1-p)^{n-j+1}$. En multipliant le tout par p, on fait apparaitre un binome de Newton à l'exception du premier terme qui a disparu dans le décalage d'indice ! On a donc $E(Y) = \dfrac{1}{p(n+1)} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} p^j(1-p)^{n+1-j} = \dfrac{1}{p(n+1)}(1-(1-p)^{n+1})$. Notez que ça ne donne pas du tout $\dfrac{1}{1+E(X)}$.

Si on suppose que $p = \dfrac{1}{2}$, on a simplement $P(X = k) = \dfrac{1}{2^n}\binom{n}{k}$. On en déduit, toujours avec le transfert, que $E(Z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} \dfrac{a^k}{2n \times 2^n} = \dfrac{(1+a)^n}{2n \times 2^n} = \dfrac{1}{2n} \times \left(\dfrac{1+a}{2}\right)^n$ (on a simplement utilisé la formule du binome de Newton).

Exercice 4 (*)

Notons X la variable aléatoire donnant le nombre de bouteilles bouchonnées dans un lot de n bouteilles. On a $X \sim \mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{15}\right)$ (on répète n fois une situation qui se produit avec probabilité $\dfrac{1}{15}$ et on compte le nombre d'occurences). Le nombre moyen de bouteilles bouchonnées dans le lot est $E(X) = \dfrac{n}{15}$. Il atteindra donc 1 pour $n = 15$.

Exercice 5 (***)

1. Commençons par calculer la probabilité qu'un groupe soit positif. Pour cela, il est plus simple de passer par le complémentaire : le groupe est testé négatif si tous les individus du groupe sont négatifs, ce qui se produit avec une probabilité $(1-p)^n$. Un groupe est donc positif avec une probabilité $1-(1-p)^n$. Ensuite, la loi du nombre de groupes positifs est une loi binomiale de paramètre $\left(\dfrac{N}{n}; 1-(1-p)^n\right)$ (puisqu'il y a $\dfrac{N}{n}$ groupes).
2. Dans un premier temps, on effectue $\dfrac{N}{n}$ analyses (une par groupe). Parmi celles-ci, il y en a en moyenne $(1-(1-p))^n \times \dfrac{N}{n}$ de positives (espérance de la variable aléatoire étudiée à la question précédente). Pour chaque groupe positif, on doit effectuer n analyses supplémentaires. On a donc au total en $E(Y) = \dfrac{N}{n} + (1-(1-p)^n)N$ analyses à faire.
3. Si $N = 1\ 000$, la première méthode conduit à faire 1 000 analyses. Avec la deuxième méthode, on en a en moyenne $10 + 1\ 000(1-0.99^{100}) \simeq 644$.

Exercice 6 (**)

1. Le nombre de tirages possibles de n cartes dans un jeu de 32 vaut $\binom{32}{n}$. Ce jeu est par ailleurs sonstitué de deux As de pique et de 30 cartes « normales ». Si on veut découvrir la supercherie, il faut tirer parmi nos n cartes les deux As de pique (pas de choix) et $n-2$ cartes quelconques parmi les 30 restantes, ce qui fait $\binom{30}{n-2}$ possibilités. La probabilité de découvrir

la supercherie est donc de $\dfrac{\binom{30}{n-2}}{\binom{32}{n}}$.

2. Dans le cas où $n = 4$, la probabilité de découvrir la supercherie sur un tirage est de $\dfrac{\binom{30}{2}}{\binom{32}{4}} = \dfrac{30 \times 29}{2} \times \dfrac{4 \times 3 \times 2}{32 \times 31 \times 30 \times 29} = \dfrac{3}{248}$. La probabilité de **ne pas** découvrir la supercherie après p tirages est donc de $\left(\dfrac{245}{248}\right)^p$, et on souhaite savoir pour quelle valeur de p cette dernière probabilité devient inférieure à 5%. On résout donc $\left(\dfrac{245}{248}\right)^p \leqslant 0.05 \Leftrightarrow p \geqslant \dfrac{\ln 0.05}{\ln 245 - \ln 248} \simeq 246.1$. Il faut donc attendre 247 tirages avant d'être sûr à 95% que la supercherie soit découverte ! C'est beaucoup. Il faut déjà attendre 57 tirages pour avoir plus d'une chance sur deux de découvrir le truc...

Exercice 7 (**)

1. Puisqu'on a une probabilité $\dfrac{1}{2}$ à chaque saut d'effectuer un saut d'une cases, et qu'on répète l'expérience n fois, on aura $Y_n \sim \mathcal{B}\left(n; \dfrac{1}{2}\right)$. En particulier, $E(Y_n) = \dfrac{n}{2}$ et $V(Y_n) = n \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{n}{4}$.
2. Il suffit de constater que, si on a effectué Y_n saut d'une case, on en a effctué $n - Y_n$ de deux cases, et qu'on a donc parcouru $Y_n + 2(n - Y_n) = 2n - Y_n$ cases lors des n sauts. Autrement dit, on a tout simplement $X_n = 2n - Y_n$. On en déduit que $X_n(\Omega) = \{n; n+1; \dots; 2n\}$, que $P(X_n = k) = P(Y_n = 2n - k) = \dfrac{n}{2n-k} \times \dfrac{1}{2^n}$; puis $E(X_n) = E(2n - Y_n) = 2n - \dfrac{n}{2} = \dfrac{3n}{2}$; enfin $V(X_n) = V(2n - Y_n) = V(Y_n) = \dfrac{n}{4}$.

Exercice 8 (***)

1. C'est une loi binomiale de paramètre (n, p). On a en particulier $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.
2. La variable Z représente le nombre total de correspondants obtenus, on a donc $Z(\Omega) = \{0; 1; \dots; n\}$.
3. On a $Z = 0$ si $X = 0$ et $Y = 0$, donc si on fait deux tours complets sans qu'un seul appel réussisse. On a donc $P(Z = 0) = (1-p)^{2n}$. Pour $Z = 1$, on a soit $X = 0$ et $Y = 1$, soit $X = 1$ et $Y = 0$, et attention, les deux possibilités n'ont pas la même probabilité ! Si $X = 0$ et $Y = 1$, un appel a réussi parmi les n derniers, et on a fait $2n$ appels au total, soit une proba de $(1-p)^n \times \binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} = npq^{2n-1}$. Pour le cas où $X = 1$ et $Y = 0$, un appel parmi les n premiers a réussi, et on en a retenté $n - 1$ qui ont raté, soit une probabilité de $\binom{n}{1} p(1-p)^{n-1} \times (1-p)^{n-1} = npq^{2n-2}$. Au total, $P(Z = 1) = npq^{2n-2}(1+q)$.
4. Comme précédemment, si on a l appels réussis au total, c'est qu'on en a eu k (avec $0 \leqslant k \leqslant l$) au premier tour, et $l - k$ au second tour, autrement dit que $X = k$ et $Y = l - k$. On a donc bien $P(Z = l) = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=l} P((X = k) \cap (Y = l - k))$.

5. On sait que $X = k$, il y a donc $n-k$ appels à retenter au deuxième tour. La probabilité conditionnelle $P_{X=k}(Y=h)$ est donc la probabilité de réussir h appels parmi $n-k$. Cette probabilité est non nulle si $h \in \{0;1;\ldots;n-k\}$ et elle vaut alors $\binom{n-k}{h}p^h(1-p)^{n-k-h}$.
   On a donc $P(Z=l) = \sum_{k=0}^{k=l} P(X=k)P_{X=k}(Y=l-k) = \sum_{k=0}^{k=l}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\binom{n-k}{l-k}p^{l-k}q^{n-l} = \sum_{k=0}^{k=l}\binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k}p^lq^{2n-k-l}$.

6. Il suffit de calculer $\binom{n}{k}\binom{n-k}{l-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{(n-k)!}{(l-k)!(n-l)!} = \frac{n!}{k!(l-k)!(n-l)!}$ et $\binom{n}{l}\binom{l}{k} = \frac{n!}{l!(n-l)!}\times\frac{l!}{k!(l-k)!} = \frac{n!}{(n-l)!k!(l-k)!}$. On peut utiliser cette égalité pour simplifier l'expression obtenue à la question précédente :
   $P(Z=l) = \sum_{k=0}^{k=l}\binom{n}{l}\binom{l}{k}p^lq^{2n-k-l} = \binom{n}{l}p^lq^{2n-2l}\sum_{k=0}^{k=l}\binom{l}{k}q^{l-k} = \binom{n}{l}p^l(1+q)^l(q^2)^{n-l}$.

7. Comme $p(1+q) = (1-q)(1+q) = 1-q^2$, on a $P(Z=l) = \binom{n}{l}(1-q^2)^l(q^2)^{n-l}$. La variable aléatoire Z suit dont une loi binomiale de paramètre $(n;1-q^2)$.