

# Feuille d'exercices n°9 : Limites et continuité

ECE3 Lycée Carnot

20 novembre 2009

## Exercice 1 (\* à \*\*)

Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x+1}}{(\ln x)^4}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - 2 \ln x$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{\sqrt{x} + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + 4x)}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x})$
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{3x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9}$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 1}$

## Exercice 2 (\*\* à \*\*\*)

Déterminer l'ensemble de définition, puis toutes les asymptotes ou branches infinies des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = \frac{x^2 + x \ln x}{x + 1}$
- $f_2(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
- $f_3(x) = \ln(e^x + e^{-x})$
- $f_4(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}$
- $f_5(x) = -3x + \ln x$
- $f_6(x) = \sqrt{x} + \ln x$
- $f_7(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$
- $f_8(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$

## Exercice 3 (\*\*)

Montrer que,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $1 + x \leq e^x \leq 1 + xe^x$ . En déduire la valeur de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ .

Montrer que,  $\forall x \in ]-1; +\infty[$ ,  $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$ . En déduire la valeur de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ .

### Exercice 4 (\*)

Déterminer des équivalents simples des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = \frac{x^2 + \ln x}{xe^{-x} + 2}$  en 0 et en  $+\infty$
2.  $g(x) = x(\ln(1+x))^4$  en 0 et en  $+\infty$
3.  $h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
4.  $k(x) = x \ln(1+x) - (x+1) \ln x$

### Exercice 5 (\*\*)

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1.  $f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 + 5x - 4}{2x + 1} & \text{si } x \neq -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x = -\frac{1}{2} \end{cases}$
2.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x - e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
3.  $f(x) = \begin{cases} x \ln \frac{x^2 + 1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
4.  $f(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x - 1) & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$
5.  $f(x) = x + \sqrt{x - \text{Ent}(x)}$

### Exercice 6 (\*\*)

Peut-on prolonger les fonctions suivantes par continuité aux bornes de leur ensemble de définition ?

- $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2}$
- $g(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1}$
- $h(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x+1}}$
- $k(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$

### Exercice 7 (\*\*)

On considère la fonction  $f$  définie par  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$  si  $x > 0$ , et  $f(x) = 0$  si  $x \leq 0$ . Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Calculer sa dérivée et montrer qu'elle est aussi continue. Faire de même avec la dérivée seconde. Pour les motivés : prouver que, quel que soit l'entier  $n \in \mathbb{N}$ , la dérivée  $n$ -ème de la fonction  $f$  est continue (mais là c'est du \*\*\*\*).

### Exercice 8 (\*)

Montrer que chacune des équations suivantes admet une solution sur l'intervalle  $I$  considéré.

1.  $x^{2008} - x^{2007} = 1$  sur  $I = [-1; 1]$ .
2.  $\ln x = \frac{x^2 - 5}{x + 2}$  sur  $I = [1; 10]$ .

3.  $3x = 1 + \ln(2 + x^2)$  sur  $I = [0; 1]$ .
4.  $e^x = 2 + x$  sur  $[\ln 2; 2 \ln 2]$ .
5.  $x^3 - 3x^2 = -1$  sur  $I = [-1; 1]$ .

Déterminer par dichotomie (et en utilisant la calculatrice !) une valeur approchée à 0.01 d'une solution de chaque équation.

### Exercice 9 (\*\*\*)

On définit, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  par  $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$ .

1. Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  a une seule solution strictement positive, qu'on notera désormais  $u_n$ .
2. Calculer  $u_1$  et  $u_2$  et vérifier que,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n \in \left] 0; \frac{2}{3} \right[$ .
3. Montrer que,  $\forall x \in ]0; 1[$ ,  $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ .
4. Que peut-on en déduire concernant la suite  $u_n$  ?
5. Montrer que  $u_n$  est convergente vers une limite qu'on notera  $l$ .
6. Déterminer la limite de  $u_n^n$  et en déduire la valeur de  $l$ .

### Exercice 10 (\*\*\*)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = x - 2 + \ln x$ .

1. Calculez  $f(1)$  et  $f(3)$ . Que peut-on en déduire ?
2. Montrez que l'équation  $f(x) = 0$  possède en fait une unique solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
3. À l'aide de la calculatrice et en procédant par dichotomie (décrivez les étapes), déterminez une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-2}$  près.
4. Montrer que  $f$  est bijective de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$ . On note  $g$  la réciproque de  $f$ , déterminer la continuité, le tableau de variation et les limites de  $g$ .
5. Déterminez  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et en déduire  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(g(t))}{g(t)}$ . En déduire un équivalent de  $g$  en  $+\infty$ .

### Exercice 11 (\*\*)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^x + x$ .

1. Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle à expliciter.
2. Justifier que pour tout entier positif  $n$ , l'équation  $f(x) = n$  possède une unique solution que l'on notera par la suite  $x_n$ .
3. Déterminer la monotonie de la suite  $x_n$ .
4. Démontrer que  $\forall n \geq 1$ ,  $\ln(n - \ln n) \leq x_n \leq \ln n$ .
5. En déduire la limite de la suite  $(x_n)$  puis un équivalent simple de  $x_n$ .