Feuille d'exercices n°24 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

13 mai 2010

Exercice 1 (**)

Un peu de motivation, six pivots de Gauss, ça va prendre quelques pages de calcul, mais ça ne peut pas faire de mal.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow 2L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 21 & 7 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 3L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 21 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\ L_2 \leftrightarrow 2L_2 - 7L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 6 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 6 & 18 & -42 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 7L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} -28 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 \\ 6 & 18 & -42 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow -L_1/28 \\ L_2 \leftarrow L_2/42 \\ L_3 \leftarrow L_3/2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice A est donc inversible, et $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 9L_1 + L_3 \\ L_2 \leftrightarrow 3L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 18 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/18 \\ L_2 \leftrightarrow L_2/9 \\ L_3 \leftarrow L_3/9 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

La matrice B est donc inversible, et $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice C n'est pas inversible.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 4L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 4L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -10 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -10 & 6 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/8 \\ L_2 \leftarrow -L_2/4 \\ L_3 \leftarrow L_3/4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice D est donc inversible, et $D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow L_1 \\ L_3 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_4 \leftarrow L_3 - L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_4 - L_1 \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice E est donc inversible, et $E^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut tricher un peu pour la matrice F en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, qui ne bougeront de toute façon pas pendant les calculs (sauf pour la toute dernière étape où on divisera la dernière ligne par 3, ce qui fera apparaitre un $\dfrac{1}{3}$ dans le coin inférieur droit de la matrice inverse).

$$F' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow 2L_1 + L_3 \\ L_2 \leftrightarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 3L_1 - 2L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftrightarrow L_2/3 \\ L_3 \leftarrow -L_3/2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice F est donc inversible, et $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (***)

Il est en fait nettement préférable d'éviter de faire des opérations interdites pour certaines valeurs de λ, ce qui est tout à fait possible en commençant avec un petit échange de lignes :

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1-\lambda \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1-\lambda & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - (1-\lambda)L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & -(1+\lambda) & 1+\lambda \\ 0 & 2(1+\lambda) & 4-(1-\lambda)^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow 2L_2 + L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & -(1+\lambda) & 1+\lambda \\ 0 & 0 & Z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

avec $Z = 2(1+\lambda) + 4 - (1-\lambda)^2 = 2 + 2\lambda + 4 - 1 + 2\lambda - \lambda^2 = 5 + 4\lambda - \lambda^2$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 16 + 20 = 36$ et admet deux racines $\lambda_1 = \dfrac{-4+6}{-2} = -1$ et $\lambda_2 = \dfrac{-4-6}{-2} = 5$. Les deux valeurs annulant un des coefficients de la diagonale sont $\lambda = -1$ (qui en annule même deux) et $\lambda = 5$. Pour toute autre valeur de λ, la matrice est donc inversible.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1-\lambda \\ 0 & -(1+\lambda) & 1+\lambda \\ 0 & 0 & (\lambda+1)(5-\lambda) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & \lambda-3 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow XL_1 - (1-\lambda)L_3 \\ L_2 \leftarrow L_3 - (5-\lambda)L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2X & 2X & 0 \\ 0 & X & 0 \\ 0 & 0 & X \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2(\lambda-1) & 2(\lambda-1) & X-(1-\lambda)(\lambda-3) \\ 2 & \lambda-3 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-3 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 7L_1 - L_2$$

en posant $X = (\lambda+1)(5-\lambda)$. Reste à effectuer l'opération $L_1 \leftarrow \dfrac{1}{2}L_1 - L_2$, qui transforme notre matrice de gauche en $X \times I$, et modifie les coefficients de la première ligne à droite : le premier devient $\lambda - 1 - 2 = \lambda - 3$, le deuxième $\lambda - 1 - (\lambda - 3) = 2$, et le dernier $\dfrac{X}{2} - \dfrac{(1-\lambda)(\lambda-3)}{2} - 2 = \dfrac{5 + 4\lambda - \lambda^2 - \lambda + 3 + \lambda^2 - 3\lambda - 4}{2} = 2$. Finalement, en divisant tout par X, on obtient la matrice inverse, beaucoup moins compliquée que ce qu'on aurait pu craindre : si $\lambda \notin \{-1; 5\}$,

$$A^{-1} = \frac{1}{(\lambda+1)(\lambda-5)} \begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & 2 \\ 2 & \lambda-3 & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-3 \end{pmatrix}$$

Pour B, c'est un peu plus facile :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1+x & -x \\ 0 & x & 1-2x \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_1 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+x & -x \\ 0 & x & 1-2x \\ 0 & x & -2x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+x & -x \\ 0 & x & 1-2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + xL_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - (1-2x)L_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+x & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-x & x & x \\ 1-2x & 2x & 2x-1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow xL_1 - (1+x)L_2$$

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1+2x+x^2 & -2x-x^2 & 1-x-x^2 \\ 1-2x & 2x & 2x-1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement, la matrice B est inversible si $x \neq 0$ et dans ce cas, $B^{-1} = \begin{pmatrix} x+2-\frac{1}{x} & -2-x & \frac{1}{x}-1-x \\ \frac{1}{x}-2 & 2 & 2-\frac{1}{x} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (**)

Appliquons donc le pivot de Gauss à la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 - L_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2/2 \\ L_3 \leftarrow L_3/2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice P est bien inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On calcule sans enthousiasme $P^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, matrice diagonale que nous noterons D. On prouve ensuite par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$: c'est vrai pour $n = 1$, puisque $A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = PDP^{-1}$, et supposant la formule vérifiée pour A^n, on aura $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, ce qui achève la récurrence. Donc $A^n = P \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 8^n \end{pmatrix} P^{-1}$, soit $A^n = \begin{pmatrix} \frac{4^n+6^n}{2} & \frac{8^n-6^n}{2} & \frac{8^n-4^n}{2} \\ \frac{4^n-6^n}{2} & \frac{6^n+8^n}{2} & \frac{8^n-4^n}{2} \\ \frac{6^n-4^n}{2} & \frac{8^n-6^n}{2} & \frac{4^n+8^n}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (*)

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & a \\ x & + & 2y & + & z & = & b \\ x & + & y & + & 2z & = & c \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & a \\ & - & 3y & & & = & a-b \\ & - & 2y & - & z & = & a-c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & a \\ & & y & & & = & \frac{b}{3} - \frac{a}{3} \\ & & & & z & = & c - a - 2y \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a + y - z \\ y & = & -\frac{a}{3} + \frac{b}{3} \\ z & = & -\frac{a}{3} - \frac{2}{3}b + c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & a + b - c \\ y & = & -\frac{a}{3} + \frac{b}{3} \\ z & = & -\frac{a}{3} - \frac{2}{3}b + c \end{array}\right.$$

On vient de résoudre le système $AX = B$, dont la solution est $X = A^{-1}B$. On en déduit que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (**)

Commençons par calculer $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 20 \\ -5 & 9 & 10 \\ -5 & 5 & 14 \end{pmatrix}$. On remarque que $A^2 = 5A - 6I$, donc $5A - A^2 = A(5I - A) = 6I$, dont on déduit que $A^{-1} = \dfrac{1}{6}(5I - A)$, soit $A^{-1} = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Le système qui suit est de la forme $AX = B$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc l'unique solution du système est $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (***)

1. On obtient $K^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $K^2 = -I$.
2. On a donc $K \times (-K) = I$, d'où $K^{-1} = -K$.
3. Calculons $M^2 = (aI + bK)^2 = a^2I^2 + abIK + baKI + b^2K^2 = (a^2 - b^2)I + 2abK = (a^2 - b^2)I + 2a(M - aI) = 2aM - (a^2 + b^2)I$.
4. Il faut avoir $a^2 + b^2 \neq 0$ pour pouvoir écrire $M^2 - 2aM = M(M - 2aI) = -(a^2 + b^2)I$, donc $M^{-1} = \dfrac{1}{a^2 + b^2}(2aI - M) = \dfrac{1}{a^2 + b^2}(aI - bK)$.
5. La matrice A est égale à $\sqrt{2}I + K$, son inverse vaut donc $\frac{1}{3}(\sqrt{2}I - K)$, c'est-à-dire $A^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & \sqrt{2}-1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \sqrt{2}+2 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 (*)

C'est en fait très simple : si A est symétrique, on a $A = {}^tA$. Par ailleurs, $A^{-1}A = I$. Si on transpose cette égalité, on obtient ${}^t(A^{-1}A) = {}^tI$, donc ${}^tA\,{}^t(A^{-1}) = I$ ou encore $A\,{}^t(A^{-1}) = I$. On en déduit que ${}^t(A^{-1})$ est l'inverse de A, donc que $A^{-1} = {}^t(A^{-1})$ par unicité de l'inverse, donc A^{-1} est bien une matrice symétrique.

Exercice 8(**)

Si A est nilpotente, il existe un entier k tel que $A^{k+1} = 0$. Or, on constate que $(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^k = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 + \cdots + A^k - A^{k+1} = I - A^{k+1} = I$, donc $I - A$ est inversible, d'inverse $I + A + A^2 + \cdots + A^k$. On a $A = I - M$, avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Un rapide calcul donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = 0$. D'après ce qui précède, on a donc $A^{-1} = I + M + M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. De même on a $B = I - N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 & -36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et enfin $N^5 = 0$, donc $B^{-1} = I + N + N^2 + N^3 + N^4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 9 (***)

1. Appliquons donc le pivot de Gauss à la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow 3L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1/6 \\ L_2 \leftarrow L_2/6 \\ L_3 \leftarrow L_3/3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

La matrice P est bien inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

2. On calcule sans enthousiasme $P^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, matrice diagonale que nous noterons D. On prouve ensuite par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$: c'est vrai pour $n = 1$, puisque $A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = PDP^{-1}$, et supposant la formule vérifiée pour A^n, on aura $A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, ce qui achève la récurrence. Donc $A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$, soit

$$A^n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} + \frac{2^{n+2}}{3} & \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} & 1 + \frac{(-1)^n - 2^{n+2}}{3} \\ -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^{n+1}}{6} + \frac{2^{n+1}}{3} & \frac{1+(-1)^n}{2} & 1 + \frac{(-1)^{n+1} - 2^{n+1}}{3} \\ -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} + \frac{2^n}{3} & \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} & 1 + \frac{(-1)^n - 2^n}{3} \end{pmatrix}.$$

3. On constate que les coefficients de la première ligne de A correspondent à ceux de la récurrence triple définissant (u_n). On peut ainsi écrire $A \times \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, soit, en posant $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, $X_{n+1} = AX_n$. On prouve par une récurrence classique que $X_n = A^nX_0$ (en effet, c'est vrai pour $n = 0$, et si on le suppose vrai au rang n, alors $X_{n+1} = AX_n = A(A^nX_0) = A^{n+1}X_0$. Pour déterminer la valeur de u_n, il suffit de connaitre le dernier coefficient de la matrice colonne X_n, donc un produit à gauche de X_0 par la dernière ligne de A^n suffit : $u_n = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} + \frac{2^n}{3} & \frac{1+(-1)^{n+1}}{2} & 1 + \frac{(-1)^n - 2^n}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{6} - \dfrac{2^n}{3} + \dfrac{1}{2} +$

$\frac{(-1)^{n+1}}{2} + 2 + \frac{2 \times (-1)^n}{3} - \frac{2^{n+1}}{3}$, soit $u_n = 3 - 2^n$.