Feuille d'exercices n°24 : Inversion de matrices

ECE3 Lycée Carnot

6 mai 2010

Exercice 1 (**)

Inverser (lorsque c'est possible) les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$;
$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (***)

Déterminer les valeurs de λ et de x pour lesquels les matrices suivantes sont inversibles et, lorsque c'est possible, leur inverse.
$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1+x & -x \\ 0 & x & 1-2x \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$

Exercice 3 (**)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer son inverse. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire les puissances de la matrice A.

Exercice 4 (*)

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ x + 2y + z = b \\ x + y + 2z = c \end{cases}$$

En déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 5 (**)

On s'intéresse à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Trouver une relation entre A^2, A et I. En déduire que A est inversible et la valeur de A^{-1}. Résoudre en utilisant ce qui précède le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & + & 4z & = & 1 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 4 \\ -x & + & y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 6 (***)

On considère la matrice carrée $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer K^2.
2. En déduire que K est inversible et calculer K^{-1}.
3. Soient a et b deux réels, on définit $M = aI + bK$. Montrer que $M^2 = -(a^2+b^2)I + 2aM$.
4. En déduire que si a et b ne sont pas nuls tous les deux, M est inversible et écrire M^{-1} sous la forme $cI + dK$.
5. En déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Exercice 7 (*)

Montrer que si une matrice A est symétrique et inversible, alors A^{-1} est également symétrique.

Exercice 8 (**)

Soit A une matrice nilpotente. Montrer que $I - A$ est inversible et que son inverse s'écrit sous la forme $I + A + A^2 + \cdots + A^k$. En déduire l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et celui de la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 (***)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$. On définit également les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer $P^{-1}AP$. En déduire la valeur de A^n.
3. Quel lien y a-t-il entre la suite (u_n) et la matrice A ? À l'aide des calculs des questions précédentes, déterminer la valeur de u_n.