Feuille d'exercices n°22 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

3 avril 2010

Exercice 1 (* à **)

- Pour I_1, intégration directe :$I_1 = \int_1^2 \frac{1}{t^2}\ dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$
- Pour I_2, on reconnait la forme $\frac{u'}{u}$, avec $u(x) = \ln x$, donc $I_2 = \int_e^3 \frac{dx}{x \ln x} = [\ln(\ln x)]_e^3 = \ln(\ln 3)$
- Pour I_3, on reconnait exactement $u'e^u$, avec $u(x) = \sqrt{x}$, d'où
  $I_3 = \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\ dx = [e^{\sqrt{x}}]_1^2 = e^{\sqrt{2}} - e$
- Pour I_4, comme toujours avec les valeurs absolues, on découpe en utilisant la relation de Chasles :
  $I_4 = \int_0^2 \left|x^2 - 3x + 2\right|\ dx = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2)\ dx + \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2)\ dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 6 - 4 + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 = 1$
- Pour I_5, il suffit de développer pour faire apparaitre des puissances qu'on sait très bien intégrer :
  $I_5 = \int_0^4 \sqrt{x}(x - 2\sqrt{x})\ dx = \int_0^4 x^{\frac{3}{2}} - 2x\ dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - x^2\right]_0^4 = \frac{2}{5}4^{\frac{5}{2}} - 16 = \frac{64}{5} - 16 = -\frac{16}{5}$
- Ici, on reconnait presque $u'e^u$, avec $u(z) = -z^5$:
  $I_6 = \int_0^2 z^4 e^{-z^5}\ dz = -\frac{1}{5}\int_0^2 -5z^4 e^{-z^5}\ dz = -\frac{1}{5}[e^{-z^5}]_0^2 = -\frac{1}{5}(e^{-32} - e) = \frac{1}{5}\left(e - \frac{1}{e^{32}}\right)$
- Le plus simple dans le cas d'une fonction qui n'est pas continue, comme la partie entière, est de découper l'intervalle d'intégration en morceaux sur lesquels la fonction et continue (et même ici constante) :
  $I_7 = \int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{2}} Ent(x)\ dx = \int_{-\frac{1}{3}}^0 -1\ dx + \int_0^1 0\ dx + \int_1^2 1\ dx + \int_2^{\frac{5}{2}} 2\ dx = -\frac{1}{3} + 0 + 1 + 1 = \frac{5}{3}$
- On a presque ici du $6u'u^5$ avec $u(s) = \ln s$, d'où le calcul suivant :
  $I_8 = \int_1^e \frac{(lns)^5}{s}\ ds = \left[\frac{1}{6}(\ln s)^6\right]_1^e = \frac{1}{6}$
- Là, encore, quasiment une forme usuelle, en l'occurence $\frac{u'}{u}$ à un facteur 2 près :
  $I_9 = \int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2t}}{e^{2t} + 2}\ dt = \left[\frac{1}{2}\ln(e^{2t} + 2)\right]_0^{\frac{\ln 2}{2}} = \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 3) = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$
- Il faut faire un peu attention pour celle-ci, on est proche de la dérivée de $(x^3 + 1)^{\frac{5}{2}}$, mais il manque un facteur 3 dans la dérivée (puisqu'on a simplement x^2 au lieu de $3x^2$), **et** il manque aussi le facteur $\frac{5}{2}$ qui devrait apparaitre en dérivant la puissance, d'où finalement

$I_{10} = \int_0^2 x^2(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\ dx = \frac{2}{15}[(x^3+1)^{\frac{5}{2}}]_0^2 = \frac{2}{15}(9^{\frac{5}{2}}-1) = \frac{2}{15}(3^5-1) = \frac{484}{15}$

- Là encore, il manque juste un petit facteur pour reconnaitre une forme usuelle (le ds au lieu du dv dans l'intégrale n'était pas un piège vicieux, mais simplement une faute de frappe) : $I_{11} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\exp(\frac{-3}{v^2})}{v^3}\ ds = \left[\frac{1}{6}\exp\left(-\frac{3}{v^2}\right)\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{6}(e^{-1}-e^{-3}) = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^3}\right)$
- Encore une forme usuelle, puisqu'on a presque la dérivée de $(q^2-2q)^{-3}$: il manque le facteur -3 de la dérivée de la puissance, et un facteur -2 pour que le numérateur soit exactement la dérivée de q^2-2q, d'où finalement $I_{12} = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1-q}{(q^2-2q)^4}\ dq = \left[\frac{1}{6}(q^2-2q)^{-3}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}\left(\left(\frac{9}{4}-3\right)^{-3} - \left(\frac{1}{4}-1\right)^{-3}\right) = \frac{1}{6}\left(\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} - \left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}\right) = 0$
- Celle-là ressemble beaucoup à la numéro 3, à un petit signe et un facteur près : $I_{13} = \int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}\ dz = [-2e^{-\sqrt{z}}]_1^4 = -2(e^{-2}-e^{-1}) = 2\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}\right)$

Exercice 2 (**)

- On fait (ô surprise) une IPP en posant $\begin{cases} u(x) = x & v'(x) = e^{3x} \\ u'(x) = 1 & v(x) = \frac{1}{3}e^{3x} \end{cases}$ pour obtenir $I_1 = \int_{-1}^1 xe^{3x}\ dx = \left[\frac{1}{3}xe^{3x}\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{3}e^{3x}\ dx = \frac{1}{3}(e^3+e^{-3}) - \left[\frac{1}{9}e^{3x}\right]_{-1}^1 = \frac{e^3}{3}+\frac{e^{-3}}{3}-\frac{e^3}{9}+\frac{e^{-3}}{9} = \frac{2}{9}e^3+\frac{4}{9}e^{-3}$
- Effectuons donc une IPP en posant $\begin{cases} u(s) = \ln s & v'(s) = \sqrt{s} \\ u'(s) = \frac{1}{s} & v(s) = \frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}} \end{cases}$, on obtient $I_2 = \int_1^4 \sqrt{3s}\ln s\ ds = \sqrt{3}\left[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\ln s\right]_1^4 - \sqrt{3}\int_1^4 \frac{2}{3}\sqrt{s}\ ds = \frac{2}{3}\sqrt{3}\times 4^{\frac{3}{2}}\ln 4 - \sqrt{3}\left[\frac{4}{9}s^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{32\sqrt{3}}{3}\ln 2 - \frac{32}{9}\sqrt{3}+\frac{4}{9}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(32\ln 2 - \frac{28}{3}\right)$ (on a utilisé $4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{4})^3 = 8$)
- Commençons par poser $\begin{cases} u(z) = (\ln z)^3 & v'(t) = z^2 \\ u'(t) = 3\times\frac{1}{z}\times(\ln z)^2 & v(z) = \frac{z^3}{3} \end{cases}$ pour obtenir : $I_3 = \int_1^e z^2(\ln z)^3\ dz = \left[\frac{1}{3}z^3(\ln z)^3\right]_1^e - \int_1^e \frac{z^3}{3}\times\frac{3}{z}(\ln z)^2\ dz = \frac{e^3}{3} - \int_1^e z^2(\ln z)^2\ dz$
  Pour ce deuxième morceau, posons $\begin{cases} u(z) = (\ln z)^2 & v'(t) = z^2 \\ u'(t) = \frac{2}{z}\times\ln z & v(z) = \frac{z^3}{3} \end{cases}$:
  $\int_1^e z^2(\ln z)^2\ dz = \left[\frac{1}{3}z^3(\ln z)^2\right] - \int_1^e \frac{z^3}{3}\times\frac{2}{z}\ln z\ dz = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\int_1^e z^2\ln z\ dz$
  Les deux constantes sorties des deux premières IPP s'annulent, et il ne reste plus qu'à calculer une dernière intégrale en posant $\begin{cases} u(z) = \ln z & v'(t) = z^2 \\ u'(t) = \frac{1}{z} & v(z) = \frac{z^3}{3} \end{cases}$:
  $I_3 = \frac{2}{3}\int_1^e z^2\ln z\ dz = \frac{2}{3}\left[\frac{z^3}{3}\ln z\right]_1^e - \frac{2}{3}\int_1^e \frac{z^2}{3}\ dz = \frac{2e^3}{9} - \frac{2}{9}\left[\frac{z^3}{3}\right]_1^e = \frac{2e^3}{9} - \frac{2e^3}{27}+\frac{2}{27} = \frac{4e^3+2}{27}$

- Allons-y pour une IPP en posant $\begin{cases} u(x) = \ln x & v'(x) = 2x^3 + 1 \\ u'(x) = \dfrac{1}{x} & v(x) = \dfrac{x^4}{2} + x \end{cases}$

  $I_4 = \displaystyle\int_1^{e^2} (2x^3+1)\ln x \, dx = \left[\left(\frac{x^4}{2} + x\right)\ln x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{x^3}{2} + 1 \, dx = e^8 + 2e^2 - \left[\frac{x^4}{8} + x\right]_1^{e^2} = e^8 + 2e^2 - \frac{1}{8}e^8 - e^2 + \frac{1}{8} + 1 = \frac{7}{8}e^8 + e^2 + \frac{9}{8}$

- Effectuons une IPP du dernier morceau en posant $\begin{cases} u(x) = x^2 & v'(x) = e^{2x} \\ u'(x) = 2x & v(x) = \dfrac{e^{2x}}{2} \end{cases}$:

  $I_5 = \displaystyle\int_0^1 (1+x+x^2)e^{2x} \, dx = \int_0^1 e^{2x} \, dx + \int_0^1 xe^{2x} \, dx + \int_0^1 x^2 e^{2x} \, dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 xe^{2x} \, dx + \left[x^2 \frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\frac{e^{2x}}{2} \, dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} = e^2 - \frac{1}{2}$

- Ici, il faut faire apparaitre un produit par 1 pour effectuer l'IPP en posant donc $\begin{cases} u(t) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{t}\right) & v'(t) = 1 \\ u'(t) = \dfrac{-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t}} = -\dfrac{1}{t(t+1)} & v(t) = t \end{cases}$, ce qui donne :

  $I_6 = \displaystyle\int_1^2 \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \, dt = \left[t \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t+1} \, dt = 2\ln\frac{3}{2} - \ln 2 + [\ln(1+t)]_1^2 = 2\ln 3 - 3\ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = 3\ln 3 - 4\ln 2$

- On pose $\begin{cases} u(s) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{s}\right) & v'(t) = 1 + 2s \\ u'(s) = \dfrac{-\frac{1}{s^2}}{1+\frac{1}{s}} = -\dfrac{1}{s(s+1)} & v(s) = s + s^2 = s(s+1) \end{cases}$ pour obtenir :

  $I_7 = \displaystyle\int_1^2 (1+2s)\ln\left(1 + \frac{1}{s}\right) \, ds = \left[s(s+1)\ln(1 + \frac{1}{s})\right]_1^2 + \int_1^2 1 \, ds = 6\ln\frac{3}{2} - 2\ln 2 + 1 = 6\ln 3 - 8\ln 2 + 1$

Exercice 3 (**)

- Pour I_1, on pose $u = t + 1$, donc $du = dt$, les bornes de l'intégrale deviennent 1 et 2 et le $t - 2$ qui traine encore est égal à $u - 3$:

  $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (t-2)(t+1)^5 \, dt = \int_1^2 (u-3)u^5 \, du = \left[\frac{u^7}{7} - \frac{u^6}{2}\right]_1^2 = \frac{128}{7} - 32 - \frac{1}{7} + \frac{1}{2} = -\frac{193}{14}$

- Pour I_2, on pose $u = t^3 + 8$, donc $du = 3t^2 \, dt$ (ce qui élimine au passage le problème du t^2 au numérateur), et les bornes deviennent 8 et 16 :

  $I_2 = \displaystyle\int_0^2 \frac{t^2}{t^3+8} \, dt = \int_8^{16} \frac{1}{3u} \, du = \frac{1}{3}[\ln u]_8^{16} = \frac{1}{3}(\ln 16 - \ln 8) = \frac{\ln 2}{3}$

- Pour I_3, on pose $t = \dfrac{x}{x+1}$, donc $dt = \dfrac{x+1-x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, ce qui simplifie à merveille le quotient présent dans l'intégrale, puisque $\dfrac{1}{x(x+1)}dx = \dfrac{x+1}{x} \times \dfrac{1}{(x+1)^2}dx = \dfrac{dt}{t}$. Par ailleurs les bornes bornes deviennent $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{1}{2}$:

  $I_3 = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)} \, dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t} \, dt = [\ln t]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \ln\frac{1}{3} - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{2}{3}$

- Pour I_4, on pose $u = s^3$, donc $du = 3s^2 ds$, le quotient dans l'intégrale pouvant s'écrire $\dfrac{s^2}{s^3(s^3+1)} = \dfrac{s^2}{u(u+1)}$. Les bornes deviennent 1 et 8, et on utilise pour terminer le calcul l'égalité $\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{u+1} = \dfrac{1}{u(u+1)}$:
$I_4 = \displaystyle\int_1^2 \frac{ds}{s(s^3+1)} = \int_1^8 \frac{1}{3u(u+1)}\ du = \frac{1}{3}\int_1^8 \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\ du = \frac{1}{3}[\ln u - \ln(u+1)]_1^8 = \frac{1}{3}(\ln 8 - \ln 9 + \ln 2) = \frac{4\ln 2 - 2\ln 3}{3}$
- Pour I_5, on pose $u = \sqrt{t}$, donc $du = \dfrac{dt}{2\sqrt{t}}$, et les bornes deviennent 1 et $\sqrt{2}$:
$I_5 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\ dt = \int_1^{\sqrt{2}} 2\ln(u^2)\ du = \int_1^{\sqrt{2}} 4\ln u\ du = 4[u\ln u - u]_1^{\sqrt{2}} = 4(\sqrt{2}\ln\sqrt{2} - \sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2}\ln 2 + 4 - 4\sqrt{2}$
- Pour I_6, on pose $u = \ln t$, donc $du = \dfrac{dt}{t}$, et les bornes deviennent 0 et 1 :
$I_6 = \displaystyle\int_1^e \frac{1}{t\sqrt{\ln t + 1}}\ dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u+1}}\ du = [2\sqrt{u+1}]_0^1 = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$

Exercice 4 (* à **)

- Par intégration directe, $F_1(t) = t + 2e^{-t}$.
- Encore par intégration directe, $F_2(t) = \sqrt{1+t^2}$.
- On reconnait cette fois-ci un produit uu', qui a pour primitive $\dfrac{1}{2}u^2$, donc $F_3(t) = \dfrac{1}{2}(\ln t)^2$
- On a du $\dfrac{u'}{u}$ à un facteur près : $F_4(t) = \dfrac{1}{3}\ln(t^3+2)$
- Cette fois-ci, on difficilement échapper à une écriture sous forme d'intégrale, et à une double intégration par partie : commençons par intégrer par partie le premier morceau en posant $\begin{cases} u(x) = x^2 & v'(x) = e^{-t} \\ u'(x) = 2x & v(x) = -e^{-x} \end{cases}$, ce qui nous donne :
$F_5(t) = \displaystyle\int_0^t (x^2 - x + 1)e^{-x}\ dx = \int_0^t x^2 e^{-x} dx - \int_0^t xe^{-x} dx + \int_0^t e^{-x} dx = [-x^2 e^{-x}]_0^t + \int_0^t 2xe^{-x} dx - \int_0^t xe^{-x} dx + [-e^{-x}]_0^t = -t^2 e^{-t} - e^{-t} + 1 + \int_0^t xe^{-x} dx$
Ne reste plus qu'à intégrer ce morceau par parties, en posant $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$, ce qui donne $\displaystyle\int_0^t xe^{-x} dx = [-xe^{-x}]_0^t - \int_0^t -e^{-x} dx = -te^{-t} + [-e^{-x}]_0^t = -te^{-t} - e^{-t} + 1$, soit finalement $F_5(t) = -t^2 e^{-t} - te^{-t} - 2e^{-t} + 2$.
- Il va falloir user (et presque abuser) de l'IPP, en posant pour commencer $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^3 & v'(x) = 1 \\ u'(x) = 3 \times \dfrac{1}{x} \times (\ln x)^2 & v(x) = x \end{cases}$ pour obtenir (on prend 1 comme borne inférieure de l'intégrale pour ne pas avoir de souci avec le ln) :
$F_5(t) = \displaystyle\int_1^t (\ln x)^3 dx = [x(\ln x)^3]_1^t - \int_1^t x \times \frac{3}{x}(\ln x)^2 dx = t(\ln t)^3 - 3\int_1^t (\ln x)^2 dx$
Cette deuxième intégrale se calcule essentiellement comme la précédente, en posant toujours $v(x) = 1$, ce qui donne :
$\displaystyle\int_1^t (\ln x)^2 dx = [x(\ln x)^2]_1^t - \int_1^t x \times \frac{2}{x}\ln x = t(\ln t)^2 - 2\int_1^t \ln t = t(\ln t)^2 - 2[x\ln x - x]_1^t = t(\ln t)^2 - 2t\ln t + 2t - 2$; et finalement $F_6(t) = t(\ln t)^3 - 3t(\ln t)^2 + 6t\ln t - 6t + 6$.

- Posons donc $u = e^x$, d'où $du = e^x dx$, et on peut transformer l'intégrale ainsi : $F_7(t) = \int_0^t \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = \int_0^t \frac{e^x}{e^x+1} \times e^x dx \int_1^{e^t} \frac{u}{u+1}\,du = \int_1^{e^t} 1 - \frac{1}{u+1}\,du = [u - ln(u+1)]_1^{e^t} = e^t - \ln(e^t+1) - 1 + \ln 2$
- Posons $u = \ln x$, donc $du = \frac{1}{x}dx$, ce qui tombe bien puisqu'on peut mettre un $\frac{1}{t}$ en facteur dans l'intégrale, obtenant : $F_8(t) = \int_1^t \frac{\ln x}{x + x(\ln x)^2}\,dx = \int_0^{\ln t} \frac{u}{1+u^2}\,du = \left[\frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right]_0^{\ln t} = \frac{1}{2}\ln(1+(\ln t)^2)$

Exercice 5 (*)

1. Le plus simple est de partir du résultat et d'identifier. Comme on a $(x+3)(x-2) = x^2+x-6$, on peut écrire $a + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+3} = \frac{a(x^2+2x-x-6)+b(x+3)+c(x-2)}{x^2+x-6}$ $= \frac{ax^2+(a+b+c)x+(-6a+3b-2c)}{x^2+x-6}$
   Par identification, on a $a = 3$; $a+b+c = -4$ et $-6a+3b-2c = -25$. On en déduit que $b+c = -7$ et $3b-2c = -7$; en multipliant la première équation par 2 et en l'additionnant à la seconde, on a donc $5b = -21$, soit $b = -\frac{21}{5}$ puis $c = -7-b = -\frac{14}{5}$.
2. La deuxième expression permet d'obtenir une primitive (en faisant attention au fait que sur $]-3;2[$, $x+3>0$ et $x-2<0$) : $F(x) = 3x - \frac{21}{5}\ln(2-x) - \frac{14}{5}\ln(x+3)$. Si on veut obtenir la primitive de f s'annulant en 1, il suffit de retrancher une constante égale à la valeur de la primitive précédente en 1, c'est-à-dire $3 - \frac{14}{5}\ln 4$.

Exercice 6 (**)

1. On a $I_{n,0} = \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.
2. On effectue une IPP en posant $\begin{cases} u(x) = (1-x)^{p+1} & v'(x) = x^n \\ u'(x) = -(p+1)(1-x)^p & v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$, et on obtient : $I_{n,p+1} = \int_0^1 x^n(1-x)^{p+1}\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(1-x)^{p+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}(p+1)(1-x)^p\,dx = \frac{p+1}{n+1}I_{n+1,p}$ (le crochet s'annulant en 0 et en 1).
3. En utilisant plusieurs fois de suite la relation précédente et le résultat de la première question, on obtient $I_{n,p} = \frac{p}{n+1}I_{n+1,p-1} = \frac{p(p-1)}{(n+1)(n+2)}I_{n+2,p-2} = \cdots = \frac{p(p-1)\dots 1}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}I_{n+p,0} = \frac{p!n!}{(n+p+1)!}$

Exercice 7 (**)

1. La fonction intégrée étant positive sur $[0;1]$ (puisque $1-x$ y est positif), la suite (I_n) est positive. De plus, $\forall x \in [0;1]$, $(1-x)^n e^x \leqslant e$ (majoration brutale mais largement suffisante), donc $I_n \leqslant \int_0^1 \frac{e}{n!}\,dx = \frac{e}{n!}$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que (I_n) converge vers 0.

2. Pour obtenir exactement l'égalité voulue, il faut effectuer une IPP en dérivant l'exponentielle et en primitivant la puissance, donc en posant $\left\{\begin{array}{ll} u(x) = e^x & v'(x) = (1-x)^n \\ u'(x) = e^x & u(x) = -\dfrac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \end{array}\right.$, d'où :
$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \, dx = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1) \times n!} e^x \, dx = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$$
3. On déduit de la question précédente que $I_0 = \dfrac{1}{1!} + I_1 = \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + I_2 = \cdots = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k!} + I_n$. Or, on a $I_0 = \displaystyle\int_0^1 e^x \, dx = [e^x]_0^1 = e - 1 = e - \frac{1}{0!}$. On en déduit donc que $e - I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$, ce qui en passant à la limite donne bien $e = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 8 (***)

1. $J_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx = \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$. De plus, $\forall x \in [0;1]$, $1+x^2 \geqslant 1$, donc $\dfrac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n$ et $J_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n \, dx = \frac{1}{n+1}$. La positivité de J_n découle simplement, comme d'habitude, de celle de la fonction intégrée.
2. Le théorème des gendarmes permet d'affirmer la convergence de J_n vers 0.
3. On pose $\left\{\begin{array}{ll} u(x) = \ln(1+x^2) & v'(x) = x^n \\ u'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} & v(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{array}\right.$, et on obtient
$$I_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(1+x^2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^{n+2}}{(n+1)(1+x^2)} \, dx = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2J_{n+2}}{n+1}$$
4. Les deux termes du membre de droite de l'égalité précédente tendent manifestement vers 0 (en utilisant la question 2), donc I_n également.
5. On a $I_n = \dfrac{1}{n+1}(\ln 2 - 2J_{n+2})$. Or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} J_{n+2} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \ln 2 - 2J_{n+2} = \ln 2$. On en déduit que $I_n \sim \dfrac{\ln 2}{n+1} \sim \dfrac{\ln 2}{n}$.