Feuille d'exercices n°22 : Intégration

ECE3 Lycée Carnot

26 mars 2010

Exercice 1 (* à **)

Calculer les intégrales suivantes :

- $I_1 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^2}\, dt$ • $I_2 = \displaystyle\int_e^3 \frac{dx}{x\ln x}$ • $I_3 = \displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\, dx$ • $I_4 = \displaystyle\int_0^2 \left|x^2 - 3x + 2\right|\, dx$
- $I_5 = \displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}(x - 2\sqrt{x})\, dx$ • $I_6 = \displaystyle\int_0^2 z^4 e^{-z^5}\, dz$ • $I_7 = \displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{5}{2}} E(x)\, dx$
- $I_8 = \displaystyle\int_1^e \frac{(lns)^5}{s}\, ds$ • $I_9 = \displaystyle\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \frac{e^{2t}}{e^{2t}+2}\, dt$ • $I_{10} = \displaystyle\int_0^2 x^2(x^3+1)^{\frac{3}{2}}\, dx$
- $I_{11} = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\exp(\frac{-3}{v^2})}{v^3}\, ds$ • $I_{12} = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1-q}{(q^2-2q)^4}\, dq$ • $I_{13} = \displaystyle\int_1^4 \frac{e^{-\sqrt{z}}}{\sqrt{z}}\, dz$

Exercice 2 (**)

Calculer à l'aide d'intégrations par parties les intégrales suivantes :

- $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^1 xe^{3x}dx$ • $I_2 = \displaystyle\int_1^4 \sqrt{3s}\ln s ds$ • $I_3 = \displaystyle\int_1^e z^2(\ln z)^3 dz$
- $I_4 = \displaystyle\int_1^{e^2} (2x^3+1)\ln x\, dx$ • $I_5 = \displaystyle\int_0^1 (1+x+x^2)e^{2x}dx$
- $I_6 = \displaystyle\int_1^2 \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) dt$ • $I_7 = \displaystyle\int_1^2 (1+2s)\ln\left(1+\frac{1}{s}\right) ds$

Exercice 3 (**)

Calculer en utilisant le changement de variable indiqué (ou un changement de variable affine si rien n'est indiqué) les intégrales suivantes :

- $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (t-2)(t+1)^5 dt$ • $I_2 = \displaystyle\int_0^2 \frac{t^2}{t^3+8}dt$ (poser $u = t^3+8$)
- $I_3 = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)}dx$ (poser $t = \dfrac{x}{x+1}$)
- $I_4 = \displaystyle\int_1^2 \frac{ds}{s(s^3+1)}$ (poser $u = s^3$ et calculer $\dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u}$)
- $I_5 = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}dt$ (poser $u = \sqrt{t}$) • $I_6 = \displaystyle\int_1^e \frac{dt}{t\sqrt{\ln t+1}}$ (poser $u = \ln t$)

Exercice 4 (* à **)

Donner les primitives de chacune des fonctions suivantes :

- $f_1 : t \mapsto 1 - 2e^{-t}$ • $f_2 : t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ • $f_3 : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$

- $f_4 : t \mapsto \dfrac{t^2}{t^3+2}$
- $f_5 : t \mapsto (t^2-t+1)e^{-t}$
- $f_6 : t \mapsto (\ln t)^3$
- $f_7 : t \mapsto \dfrac{e^{2t}}{e^t+1}$ (on posera $u = e^t$)
- $f_8 : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t+t(\ln t)^2}$ (on posera $u = \ln t$)

Exercice 5 (*)

Soit f la fonction définie sur $]-3;2[$ par $f(x) = \dfrac{3x^2-4x-25}{x^2+x-6}$.

1. Montrer qu'on peut écrire f sous la forme $f(x) = a + \dfrac{b}{x-2} + \dfrac{c}{x+3}$.
2. En déduire l'expression de la primitive de f s'annulant en 1.

Exercice 6 (**)

On considère, $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$, l'intégrale $I_{m,n} = \displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^p\ dx$.

1. Calculer $I_{m,0}$ pour toute valeur de m.
2. Établir une relation entre $I_{m,n+1}$ et $I_{m+1,n}$.
3. En déduire une expression simple de $I_{m,n}$.

Exercice 7 (**)

On s'intéresse à la suite d'intégrales définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.

1. Montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
2. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.
3. En déduire que $e = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 8 (***)

On définit deux suites d'intégrales de la façon suivante : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\ dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\ dx$ (pour $n \geqslant 1$).

1. Calculer J_1 et montrer que $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
2. En déduire la limite de J_n.
3. Montrer à l'aide d'une intégration par partie que $I_n = \dfrac{\ln 2}{n+1} - \dfrac{2}{n+1} J_{n+2}$.
4. En déduire la convergence et la limite de (I_n).
5. Déterminer un équivalent de I_n.

Exercice 9 (***)

On définit, pour tout entier n, l'intégrale $I_n = \int_1^e x^2(\ln x)^n dx$.

1. Calculer I_1.
2. Montrer que sur $[1;e]$, on a $(\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n$, et en déduire le sens de variation de I_n.
3. Montrer que (I_n) est convergente.
4. Montrer que sur $[1;e]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant \frac{x}{e}$. En déduire la limite de I_n.
5. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}I_n$. En déduire un équivalent de I_n.

Exercice 10 (**)

Dériver chacune des fonctions suivantes :

- $f_1(x) = \int_0^{2x} e^{-3\sqrt{2\ln t}}dt$
- $f_2(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{1+t+t^2}dt$
- $f_3(x) = \int_{-x}^{x} \sqrt{1+t^2}dt$
- $f_4(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{e^x} \frac{t}{\ln t}dt$

Exercice 11 (***)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}dt$.

1. Montrer que f est dérivable et déterminer sa dérivée. En déduire le tableau de variations de f.
2. On pose désormais $g(x) = f(x) - \ln x$. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire son signe.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 12 (**) à (***)

Déterminer les limites de chacune des suites suivantes en utilisant des sommes de Riemann.

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} \qquad w_n = \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 13 (EDHEC 2004) (**)

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt$.

1. Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n.
2. Calculer u_0 et u_1.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ln 2$.

(c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}$, écrire $\ln 2 - u_n$ sous la forme d'une intégrale.

   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln 2 - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   (c) Donner la limite de la suite (u_n).

Exercice 14 (ESCP 92) (****)

Pour tout entier naturel k on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}^+$ par la relation

$$f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt$$

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel k, la fonction f_k est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

   (b) Etudier la suite $(f_k(0))_{k\geqslant 0}$. En déduire, pour tout réel positif x, la limite de la suite $(f_k(x))_{k\geqslant 0}$.

2. (a) Soit $x > 0$. Etablir que $f_{k+1}(x) = \dfrac{k+1}{x} f_k(x) - \dfrac{e^{-x}}{x}$ pour tout $k \geqslant 0$.

   (b) Expliciter les fonctions f_0, f_1 et f_2.

   (c) Montrer que, $f_0(x) \underset{+\infty}{\sim} 1/x$.

   (d) A l'aide de la relation établie au $c)$, montrer que pour tout k, $f_k(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{k!}{x^{k+1}}$.

3. (a) En effectuant un changement de variable, montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > 0$, $f_k(x) = \dfrac{1}{x^{k+1}} \displaystyle\int_0^x u^k e^{-u}\, du$.
   En déduire que f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

   (b) Trouver une relation simple entre f_k' et f_{k+1}.

   (c) Montrer que pour tout réel $\forall y \geqslant 0$, $1 - e^{-y} \leqslant y$. En déduire que pour tout entier naturel k, la fonction f_k est continue en 0. Est-elle dérivable à droite en ce point ?