Feuille d'exercices n°26 : Espaces vectoriels

ECE3 Lycée Carnot

8 juin 2010

Exercice 1 (*)

Déterminer parmi les ensembles suivants lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$: $A = \{(x,y) \mid x \leqslant y\}$; $B = \{(x,y) \mid xy = 0\}$; $C = \{(x,y) \mid x = y\}$; $D = \{(x,y) \mid x + y = 1\}$; $E = \{(x,y) \mid 2x - 6y = 0\}$.

Exercice 2 (**)

On se place dans l'ensemble E des suites réelles. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E ?

- suites arithmétiques
- suites géométriques
- suites récurrentes linéaires d'ordre 2
- suites vérifiant la récurrence $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 3u_n$
- suites nulles à partir d'un certain rang
- suites équivalentes à $\dfrac{\lambda}{n}$, pour un certain réel λ.

Exercice 3 (*)

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les ensembles $F = \{(x,y,z) \mid x+y-z = 0\}$ et $G = \{(a-b, a+b, a-3b) \mid a,b \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer leur intersection.

Exercice 4 (*)

Dans un espace vectoriel E, on considère trois vecteurs x_1, x_2 et x_3 et on définit $y_1 = x_1+x_2+x_3$, $y_2 = x_1 + x_2$ et $y_3 = 2x_1 + x_2 - x_3$. Montrer que x_1, x_2 et x_3 sont des combinaisons linéaires de y_1, y_2 et y_3. En déduire que $Vect(x_1, x_2, x_3) = Vect(y_1, y_2, y_3)$.

Exercice 5 (**)

Donner une base de chacun des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$: $F = \{(x,y,z,t) \mid x + y - 2z = 2x - 3y + z = -4x + z = 0\}$; $G = \{(a - 2b + c, 2a - 3b, 4a + 2c, 2a + b - c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}^3\}$; $H = \{(x,y,z,t) \mid x + y - z = 2x - y + t = x - 2y - z + t = 0\}$.

Exercice 6 (**)

Montrer que la famille $((0,1,1), (2,0,-1), (2,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner les coordonnées de $(4,-1,1)$ et de $(1,0,0)$ dans cette base. Mêmes questions avec la famille $((3,-1,1), (2,0,0), (1,-2,4))$.

Exercice 7(*)

On se place dans un espace vectoriel de dimension 3 dont une base est (e_1, e_2, e_3). La famille $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1)$ est-elle une base de E ? Et la famille $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$?

Exercice 8 (***)

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $E = \mathbb{R}^3$, dont on notera les vecteurs en colonne et non en ligne pour une fois.

1. On note $F = \{X \in E \mid AX = 0\}$. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. En donner une base.
3. On note $G = \{Y \in E \mid AX = Y \text{ admet au moins une solution}\}$. Montrer que G est un espace vectoriel.
4. Montrer qu'on peut écrire G comme ensemble des solutions d'un système linéaire.
5. Trouver une base de G.

Exercice 9 (***)

On considère les fonctions e_1, e_2, e_3 et e_4 définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $e_1(x) = x$, $e_2(x) = x^2$, $e_3(x) = x \ln x$ et $e_4(x) = x^2 \ln x$. On note E l'espace vectoriel engendré par ces quatre fonctions.

1. On suppose dans cette question que a, b, c et d sont 4 réels tels que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $ax + bx^2 + cx \ln x + dx^2 \ln x = 0$. Montrer que $a + b = 0$.
2. Etablir que $\forall x > 1$, $\dfrac{a}{x \ln x} + \dfrac{b}{\ln x} + \dfrac{c}{x} + d = 0$. En déduire que $d = 0$.
3. Etablir ensuite que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{a}{x} + b + c\dfrac{\ln x}{x} = 0$. En déduire que $b = 0$.
4. Montrer finalement que $a = b = c = d = 0$.
5. En déduire que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille libre, puis que c'est une base de E.

Exercice 10 (***)

On considére les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble des matrices M s'écrivant sous la forme $M = aI + bJ + cK + dL$, avec a, b, c, $d \in \mathbb{R}^4$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que la famille (I, J, K, L) est libre.
3. Donner la dimension de E.
4. Montrer, en les calculant explicitement, que J^2, K^2, L^2, J^3 et L^3 appartiennent à E.
5. En déduire, sans aucun calcul matriciel, que JK, KJ, KL, LK, JL et LJ appartiennent aussi à E.
6. Etablir enfin que le produit de deux matrices de E est encore une matrice de E.