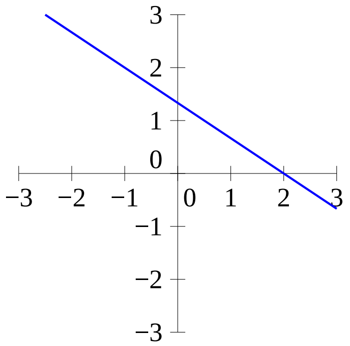
# Feuille d'exercices n°12 : corrigé

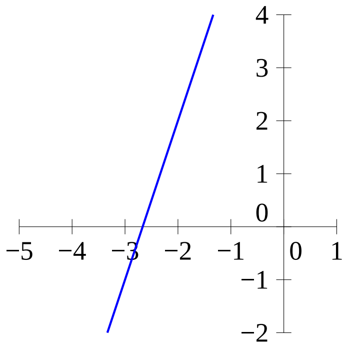
ECE3 Lycée Carnot

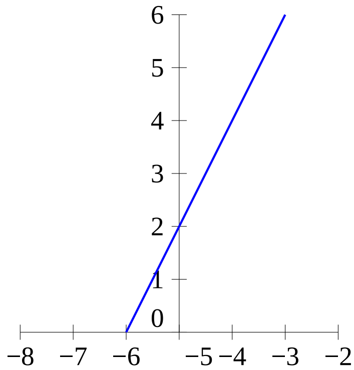
15 décembre 2009

## Exercice 1 (* à **)

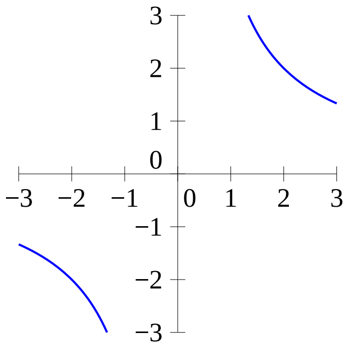
1. La fonction $f_1$ est évidemment définie sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. La ligne de niveau 4 de $f_1$ est définie comme $\{(x,y) \mid 2x+3y=4\} = \left\{(x,y) \mid y = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x\right\}$. Cette ligne de niveau est une droite, tout comme d'ailleurs les représentations graphiques des applications partielles obtenues pour $x=4$ et $y=4$, qui ont pour équations respectives $y \mapsto 3y+8$ et $x \mapsto 2x+12$. Il est tout à fait normal qu'on obtienne que des droites ici puisque la surface représentative de $f_1$ est un plan. Ci-dessous, dans l'ordre, la ligne de niveau 4, la représentation de l'application partielle obtenue pour $x=4$, puis celle obtenue pour $y=4$.

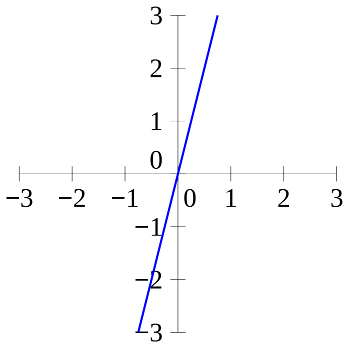


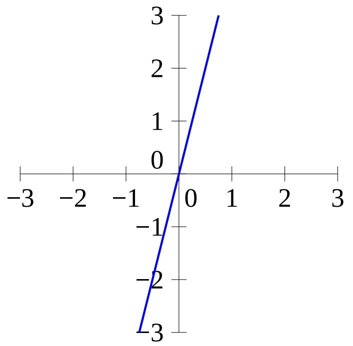




2. La fonction $f_2$ est également définie sur $\mathbb{R}^2$, sa ligne de niveau 4 a pour équation $xy=4$, c'est-à-dire $y = \frac{4}{x}$, qui est une équation d'hyperbole. Les représentations graphiques des deux applications partielles sont par contre des droites, d'équation $y \mapsto 4y$ et $x \mapsto 4x$.

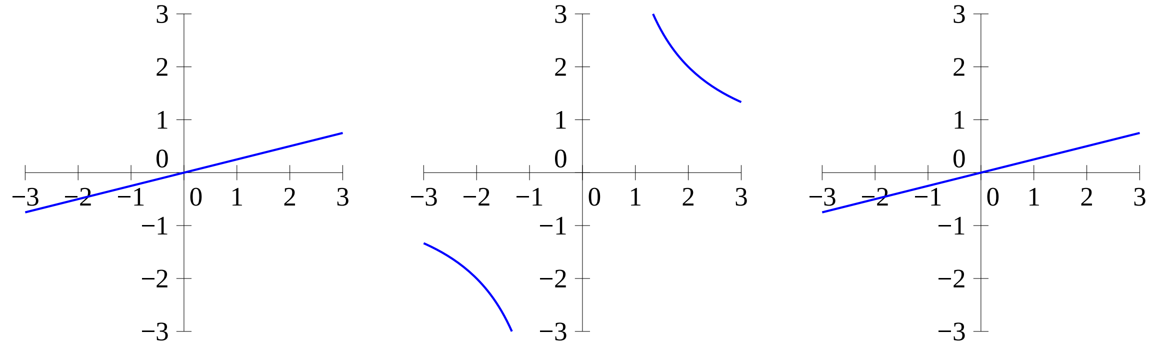


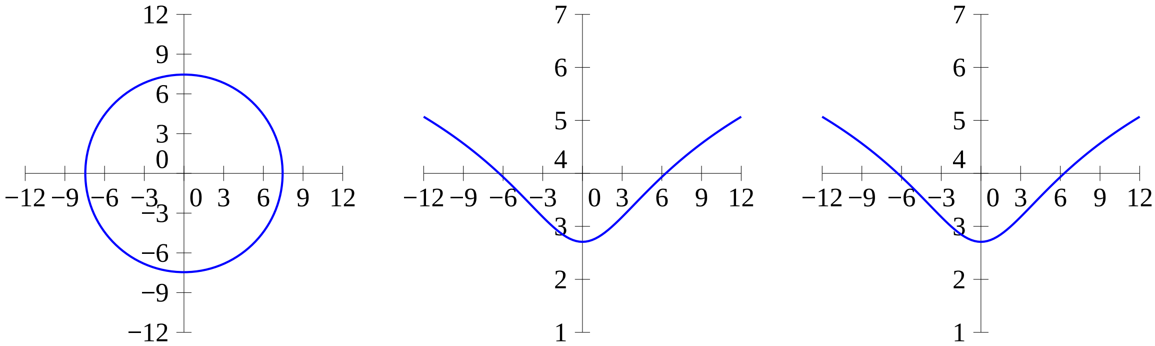




3. La fonction $f_3$ est définie si $y \neq 0$, donc sur le plan $\mathbb{R}^2$ privé de l'axe des ordonnées (je me suis dispensé des représentations graphiques des domaines de définition, car ce n'est vraiment pas intéressant). La ligne de niveau 4 a pour équation $\frac{x}{y} = 4$, soit $y = \frac{x}{4}$, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une droite, privée toutefois d'un point puisqu'on ne peut pas avoir $y=0$ (ça ne se voit pas sur le graphique). L'application partielle obtenue en fixant $x=4$ a pour équation $y \mapsto \frac{4}{y}$, c'est

une hyperbole. Par contre, l'application partielle obtenue pour $x = 4$ est une droite d'équation $x \mapsto \dfrac{x}{4}$ (même allure que la ligne de niveau 4).

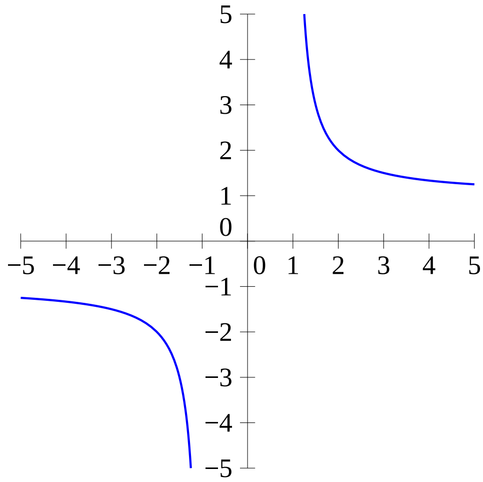


4. La fonction $f_4$ est définie si $x^2 + y^2 > 1$, c'est-à-dire en dehors du disque de centre 0 et de rayon 1. La ligne de niveau 4 a pour équation $\ln(x^2 + y^2 - 1) = 4$, soit $x^2 + y^2 = e^4 + 1$, il s'agit d'un cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{e^4 + 1}$. Les deux applications partielles ont une représentation graphique similaire, celle de la fonction $x \mapsto \ln(x^2 + y^2 - 1)$, dont on peut faire une étude sommaire si on le souhaite (elle est paire, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, de limite $+\infty$ en $+\infty$ et admettant une branche parabolique de direction $(Ox)$).



## Exercice 2 (**)

La fonction $f$ est définie dès que $|x| + |y| \neq 0$. Or, les deux valeurs absolues étant positives, leur somme ne peut être nulle que si elles sont toutes les deux nulles, c'est-à-dire si $x = y = 0$. On a donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{0; 0\}$. Quant à la ligne de niveau cherchée, elle a pour équation $xy = |x| + |y|$. Ceci ne peut pas se produire quand $x$ et $y$ sont de signes opposés, car on aurait alors une valeur négative à gauche et une valeur positive à droite. Supposons donc $x$ et $y$ de même signe et même, pour commencer, positifs ou nuls tous les deux. On cherche alors les couples $(x, y)$ tels que $xy = x + y$, soit $y(x-1) = x$, ou encore $y = \dfrac{x}{x-1}$. Pour que $x$ et $y$ soient tous les deux positifs, il faut se restreindre aux cas où $x > 1$. De même, si $x$ et $y$ sont négatifs tous les deux, on chercher à avoir $xy = -x - y$, soit $y = -\dfrac{x}{x+1}$, ce qui fonctionnera bien si $x < -1$. Chacun de ces deux morceaux de ligne de niveau est une branche d'hyperbole (en effet, on a $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{x-1+1}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$ ; et $-\dfrac{x}{x+1} = -\dfrac{x+1-1}{x+1} = -1 + \dfrac{1}{x+1}$). On obtient une courbe de niveau ressemblant à ceci :




## Exercice 3 (**)

Pour chaque fonction sauf $j$ (où les calculs sont assez pénibles), seule une des deux dérivées partielles secondes croisées est calculée, l'autre lui étant égale. Cela ne vous dispense naturellement pas de calculer également la dernière dérivée pour vérifier ce fait.

1. La fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}^2$, et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ;
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2} - x \times \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2+y^2-x^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)} = \dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ ;
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ (même calcul que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$).
2. La fonction $g : (x,y) \mapsto e^{y \ln x}$ est définie si $x > 0$, donc sur le demi-plan situé strictement au-dessus de l'axe des abscisses. De plus, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y}{x}e^{y\ln x}$ ; $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \ln x\ e^{y \ln x}$ ;
$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2}e^{y\ln x} + \dfrac{y^2}{x^2}e^{y\ln x} = \left(\dfrac{y(y-1)}{x^2}\right)x^y$ ;
$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{1}{x}e^{y\ln x} + \dfrac{y\ln x}{x}e^{y\ln x} = \dfrac{1+y\ln x}{x}x^y$ ;
$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = (\ln x)^2 x^y$.
3. La fonction $h$ est définie sur $\mathbb{R}^2$, et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 3x^2+2y+3y^2$ ; $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2x+6xy+4y^3$ ;
$\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = 6x$ ; $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y) = 2+6y$ ; $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = 6x+12y^2$.
4. La fonction $i$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ et $\dfrac{\partial i}{\partial x}(x,y) = 2xe^{-xy} - y(x^2+y^2)e^{-xy} = (2x-yx^2-y^3)e^{-xy}$ ; de même, $\dfrac{\partial i}{\partial y}(x,y) = (2y-xy^2-x^3)e^{-xy}$ ;
$\dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2}(x,y) = (2-2xy)e^{-xy} - y(2x-yx^2-y^3)e^{-xy} = (2-4xy+y^2x^2+y^4)e^{-xy}$ ;
$\dfrac{\partial^2 i}{\partial y \partial x}(x,y) = (-x^2-3y^2)e^{-xy} - x(2x-yx^2-y^3)e^{-xy} = (-3x^2-3y^2+yx^3+xy^3)e^{-xy}$

$\dfrac{\partial^2 i}{\partial y^2}(x,y) = (2 - 4xy + x^2y^2 + x^4)e^{-xy}$

5. La fonction $j$ est définie si $y \neq -x^2$, c'est-à-dire sur le plan privé d'une parabole, et $\dfrac{\partial j}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x^2+y-2x(x-y)}{(x^2+y)^2} = \dfrac{-x^2+2xy+y}{(x^2+y)^2}$ ; $\dfrac{\partial j}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-(x^2+y)-(x-y)}{(x^2+y)^2} = \dfrac{-x^2-x}{(x^2+y)^2}$
   $\dfrac{\partial^2 j}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{(-2x+2y)(x^2+y)^2 - 2\times 2x(x^2+y)(-x^2+2xy+y)}{(x^2+y)^4} =$
   $\dfrac{(-2x+2y)(x^2+y) - 4x(-x^2+2xy+y}{(x^2+y)^3} = \dfrac{2x^3-6xy-6x^2y+2y^2}{(x^2+y)^3}$
   $\dfrac{\partial^2 j}{\partial y\partial x}(x,y) = \dfrac{(2x+1)(x^2+y)^2 - 2(x^2+y)(-x^2+2xy+y}{(x^2+y)^4}$
   $= \dfrac{2x^3+2xy+x^2+y+2x^2-4xy-2y}{(x^2+y)^3} = \dfrac{2x^3+3x^2-2xy-y}{(x^2+y)^3}$
   $\dfrac{\partial^2 j}{\partial x\partial y}(x,y) = \dfrac{(-2x-1)(x^2+y)^2 - 2\times 2x(x^2+y)(-x^2-x)}{(x^2+y)^4} = \dfrac{(-2x-1)(x^2+y) - 4x(-x^2-x)}{(x^2+y)^3}$
   $= \dfrac{-2x^3-2xy-x^2-y+4x^3+4x^2}{(x^2+y)^3} = \dfrac{2x^3+3x^2-2xy-y}{(x^2+y)^3}$
   $\dfrac{\partial^2 j}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{-2(-x^2-x)}{(x^2+y)^3} = \dfrac{2x^2+2x}{(x^2+y)^3}$
6. La fonction $k$ est définie si $y > 0$, donc sur un demi-plan, et $\dfrac{\partial k}{\partial x}(x,y) = (\ln y)^2$ ; $\dfrac{\partial k}{\partial y}(x,y) = x \times \dfrac{2}{y}(\ln y) + 2y = \dfrac{2x\ln y}{y} + 2y$ ;
   $\dfrac{\partial^2 k}{\partial x^2}(x,y) = 0$ ;
   $\dfrac{\partial^2 k}{\partial y\partial x}(x,y) = \dfrac{2\ln y}{y}$ ;
   $\dfrac{\partial^2 k}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{2x-2x\ln y}{y^2} + 2 = 2x\dfrac{1-\ln y}{y} + 2$

## Exercice 4 (* à **)

1. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x+2y$, donc la recherche de points critiques revient à résoudre le système constitué des deux équations $2x+y=0$ et $x+2y=0$, qui a pour solution unique $(0;0)$.
2. On a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3y-3x^2 = 3(y-x^2)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 3x-3y^2 = 3(x-y^2)$.Le spoints sont obtenus en recherchant les couples vérifiant $x=y^2$ et $y=x^2$. Par une simple substitution, on obtient $y^4=y$, soit $y(y^3-1)=0$, équation ayant pour solutions $y=0$ et $y=1$. On obtient alors respectivement $x=0$ et $x=1$, d'où les deux points critiques $(0;0)$ et $(1;1)$.
3. On a cette fois $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 3x^2+3y^2-15$ et $\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 6xy-12$. On se retrouve donc avec les deux équations $x^2+y^2=5$ et $2xy=4$ (oui, j'ai volontairement laissé un facteur 2 en trop). En additionnant et en soustrayant ces deux équations, on obtient $x^2+2xy+y^2=9$ et $x^2-2xy+y^2=1$, soit $(x+y)^2=3$ et $(x-y)^2=1$. Il y a pas moins de quatre cas à étudier : si $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}\right.$, alors $x=2$ et $y=1$ ; si $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & -3 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}\right.$, alors $x=-1$ et $y=-2$ ; si $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ x & - & y & = & -1 \end{array}\right.$, alors $x=1$ et $y=2$ ; enfin si $\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & -3 \\ x & - & y & = & -1 \end{array}\right.$, alors $x=-2$ et $y=1$. Il y a donc quatre points critiques pour la fonction $h$ : $(-2;1)$ ; $(-1;-2)$ ; $(1;2)$ et $(2;1)$.

## Exercice 5 (***)

1. Pour la première fonction, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y - 3$, et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x - 6$, le système à résoudre a pour unique solution $x = 0$ et $y = 3$, qui est donc le seul point critique de la fonction $f$. Comme $f(0;3) = -9$, on cherche le signe de $f(x,y) - 9 = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y + 9 = \left(y - 3 + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3x^2}{4} \geqslant 0$. On en déduit que le point critique est un minimum global pour $f$. Pour ceux qui peinent dans le scalculs, rappelons que $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.
2. La deuxième fonction a pour dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y - 2x - 2$, ce qui donne un système qui se résout aisément : $x = y$, puis $y = 1$ et $x = 1$. Le point $(1;1)$ est donc le seul point critique pour la fonction $f$. Comme $f(1;1) = 4$, on cherche le signe de $f(x,y) - 4 = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1 = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2y + 1 = (x-y)^2 + (y-1)^2 \geqslant 0$. Comme précédemment, le point critique est donc un minimum global pour la fonction.

## Exercice 6 (***)

1. Calculons donc : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2$ ; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 3$ ; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$ ; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$.
2. C'est tout juste s'il y a un système à résoudre ici : $2x + 2 = 0$ donne $x = -1$, et $2y + 3 = 0$ donne $y = -\frac{3}{2}$. Le seul point critique est donc le point $\left(-1; -\frac{3}{2}\right)$.
3. Utilisons donc le critère donné juste avant l'exercice : la valeur de $D$ est ici $2 \times 2 - 0^2 = 4 > 0$, donc le point critique est un extremum, et comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-1, -\frac{3}{2}\right) > 0$, le point critique est un minimum (local) de la fonction $f$.
4. Constatons que $f(x) = x^2 + 2x + 1 + y^2 + 3y + \frac{9}{4} - \frac{13}{4} = (x+1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$. On peut en déduire facilement que la fonction admet pour minimum global $-\frac{13}{4}$, valeur atteinte pour son point critique. On peut même faire mieux et donner l'allure des courbes de niveau $k$ : si $k < -\frac{13}{4}$, la courbe de niveau est vide ; sinon, on obtient l'équation $(x+1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = k + \frac{13}{4}$, qui est l'équation du cercle de centre $\left(-1; -\frac{3}{2}\right)$ (le point critique de $f$) et de rayon $\sqrt{k + \frac{13}{4}}$.

## Exercice 7 (***)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 2e^{-x} + 3x^2 - 2xy + y^2$.

1. Calculons à nouveau : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2e^{-x} + 6x - 2y$ ; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x + 2y$ ; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2e^{-x} + 6$ ; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2$ et enfin $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$.
2. Appelons $g$ la fonction (à une variable) définie par $g(x) = 2x - e^{-x}$. Cette fonction est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisque somme de deux fonctions croissantes ($e^{-x}$ est décroissante, donc $-e^{-x}$ est croissante). De plus, elle a pour limites respectives $-\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$ et

en $+\infty$ (pas de problème de calcul, il n'y pas de forme indéterminée). Cette fonction est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et 0 admet donc un unique antécédent par $g$. Autrement dit, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution $\alpha$.

Or, la recherche des points critiques de $f$ se ramène au système $\left\{\begin{array}{rcl} 2e^{-x} + 6x - 2y & = & 0 \\ -2x & = & 2y \end{array}\right. \Leftrightarrow$ $\left\{\begin{array}{rcl} 2e^{-x} + 4x & = & 0 \\ x & = & y \end{array}\right.$. La première équation revient à dire que $2g(x) = 0$, et on en déduit que l'unique point critique de $f$ est le point $(\alpha; \alpha)$.

3. Utilisons le critère de détermination de la nature des points critiques : ici, $D = (2e^{-\alpha} + 6) \times 2 - (-2)^2 = 4e^{-\alpha} + 8 = 8\alpha + 8$ puisque $g(\alpha) = 0$. Comme on a $g(0) = -1$, on peut affirmer que $\alpha > 0$, donc $D > 0$. Le point critique correspond donc à un extrêmum pour $f$. De plus, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha, \alpha) > 0$, donc il s'agit d'un minimum. Pour déterminer sa valeur, il ne reste plus qu'à calculer $f(\alpha, \alpha) = 2e^{-\alpha} + 3\alpha^2 - 2\alpha^2 + \alpha^2 = 4\alpha + 2\alpha^2 = 2\alpha(2 + \alpha)$.

## Exercice 8 (**)

1. C'est un simple calcul de dérivées partielles : $\dfrac{\partial P}{\partial K}(K, L) = \dfrac{2}{5}K^{\frac{1}{5}-1}L^{\frac{3}{5}} = \dfrac{2}{5}\dfrac{L^{\frac{3}{5}}}{K^{\frac{4}{5}}}$ ; et $\dfrac{\partial P}{\partial L}(K, L) = \dfrac{6}{5}K^{\frac{1}{5}}L^{\frac{3}{5}-1} = \dfrac{6}{5}\dfrac{K^{\frac{1}{5}}}{L^{\frac{2}{5}}}$

2. Il suffit pour cela de calculer les dérivées partielles secondes (et encore, pas toutes) : $\dfrac{\partial^2 P}{\partial K^2}(K, L) = -\dfrac{8}{25}\dfrac{L^{\frac{3}{5}}}{K^{\frac{9}{5}}}$ ; et $\dfrac{\partial^2 P}{\partial L^2}(K, L) = -\dfrac{12}{25}\dfrac{K^{\frac{1}{5}}}{L^{\frac{7}{5}}}$. Ces deux dérivées étant négatives, les rendements sont bien décroissants.

3. Caculons plutôt $\dfrac{P(aK, aL)}{aP(K, L)} = \dfrac{2(aK)^{\frac{1}{5}}(aL)^{\frac{3}{5}}}{2aK^{\frac{1}{5}}L^{\frac{3}{5}}} = \dfrac{2a^{\frac{4}{5}}K^{\frac{1}{5}}L^{\frac{3}{5}}}{2aK^{\frac{1}{5}}L^{\frac{3}{5}}} = \dfrac{1}{a^{\frac{1}{5}}}$. Ce facteur étant supérieur à 1 si $a$ est lui-même supérieur à 1, cela veut dire qu'en augmentant simultanément le travail et le capital d'un même facteur $a$, la prodution augmente d'un facteur plus élevé. Autrement dit, on fait des économies d'échelle en augmentant les valeurs de tous les facteurs.