Feuille d'exercices n°12 : fonctions à deux variables

ECE3 Lycée Carnot

15 décembre 2009

Exercice 1 (* à **)

Après avoir déterminé et représenté le domaine de définition des fonctions suivantes, tracer leur ligne de niveau 4, puis leurs applications partielles pour x fixé égal à 4, puis y fixé égal à 4 :

1. $f_1(x, y) = 2x + 3y$
2. $f_2(x, y) = xy$
3. $f_3(x, y) = \dfrac{x}{y}$
4. $f_4(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$

Exercice 2 (**)

On considère la fonction de deux variables $f(x, y) = \dfrac{xy}{|x| + |y|}$. Déterminer son domaine de définition, et tracer sa ligne de niveau 1.

Exercice 3 (**)

Après avoir déterminé leur domaine de définition, calculer les dérivées partielles (y compris les quatre dérivées secondes) des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
2. $g(x, y) = x^y$
3. $h(x, y) = x^3 + 2xy + 3xy^2 + y^4$
4. $i(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-xy}$
5. $j(x, y) = \dfrac{x - y}{x^2 + y}$
6. $k(x, y) = x(\ln y)^2 + y^2$

Exercice 4 (* à **)

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes, et déterminer si elles admettent des points critiques :

1. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$
2. $g(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$
3. $h(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Exercice 5 (***)

Déterminer les points critiques des fonctions suivantes, et déterminer la nature de ces points critiques en calculant $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ dans chacun des cas (x_0, y_0 étant le point critique) et en essayant d'en déterminer le signe.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$
2. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$

Pour les exercices 6 et 7, on utilisera le résultat suivant pour déterminer la nature des points critiques : si (x_0, y_0) est un point critique de f, on note $D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)\right)^2$, alors (x_0, y_0) n'est pas un extremum si $D < 0$, mais c'en est un si $D > 0$, maximum si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, minimum sinon. Si $D = 0$, on ne peut pas conclure.

Exercice 6 (***)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + 2x + y^2 + 3y$.

1. Calculer les dérivées partielles et dérivées partielles secondes de la fonction f.
2. Montrer que f a un unique point critique, qu'on déterminera.
3. Déterminer la nature de ce point critique.
4. Écrire f sous forme de somme de carrés et déterminer les courbes de niveau de f. Peut-on retrouver la nature du point critique par ce biais ?

Exercice 7 (***)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 2e^{-x} + 3x^2 - 2xy + y^2$.

1. Calculer les dérivées partielles et dérivées partielles secondes de la fonction f.
2. Montrer que l'équation $2x - e^{-x} = 0$ a une unique solution α (au'on ne cherchera surtout pas à calculer) sur $\mathbb{R}$, et en déduire que f a pour unique point critique (α, α).
3. Montrer que ce point critique correspond à un minimum local de valeur $\alpha(2 + \alpha)$.

Exercice 8 (**)

La fonction de production d'une entreprise est donnée par l'équation $P(K, L) = 2K^{\frac{1}{5}}L^{\frac{3}{5}}$, K désignant le capital et L le travail.

1. Calculer les productivités marginales du capital et du travail.
2. Montrer que ces productivités sont décroissantes.
3. Le rendement d'échelle de la fonction est obtenu en calculant $\frac{P(aK, aL)}{P(K, L)}$. Que vaut-il ici ? Quelle signification peut-on donner à cette valeur ?