Feuille d'exercices n°13 : dérivation

ECE3 Lycée Carnot

12 janvier 2010

Exercice 1 (*)

Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité des fonction suivantes et calculer leurs dérivées :

- $f_1(x) = x \ln x - x$
- $f_2(x) = x\sqrt{1-x}$
- $f_3(x) = x^x$
- $f_4(x) = e^{3x^2+\sqrt{2x}}$
- $f_5(x) = \dfrac{x^4 - 3x^2 + 5x - 1}{2x^3 + x^2 - 4x + 7}$
- $f_6(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x - 1}$
- $f_7(x) = \dfrac{x^2 + x \ln x}{x+1}$
- $f_8(x) = 3^{4x^2-1}$
- $f_9(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$
- $f_{10}(x) = x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$
- $f_{11}(x) = x^2 - |x|$
- $f_{12}(x) = x^2 \ln x$ prolongée par $f_{12}(0) = 0$

Exercice 2 (** à ***)

Faire une étude complète des fonctions suivantes (domaine de définition, limites et éventuels prolongements par continuité, asymptotes et branches infinies, dérivée et étude des variations, et enfin une allure de la courbe) :

1. $f(x) = \sqrt{(x+1)}\ln(x+1)$
2. $g(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$
3. $h(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$
4. $i(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{2x^2 - 5x - 3}$
5. $k(x) = x^{\frac{1}{x}}$
6. $l(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2 - 1}$

Exercice 3 (*)

Calculer les équations des tangentes en 0, 1, -2 et $\sqrt{3}$ de chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$
- $g(x) = \ln(3x - 8)$
- $h(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x - 5}$
- $k(x) = e^{3x^2 - 2x + 1}$

Exercice 4 (**)

Soit $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 + 1$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. On note g la réciproque de f. Quel est le sens de variations de g ?
3. Quel est le domaine de dérivabilité de g ?
4. Représenter dans un même repère les courbes représentatives de f et de g, en indiquant les tangentes horizontales et verticales.

Exercice 5 (**)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x \ln x$.

1. Étudier les variations de f.
2. En déduire que f est bijective de $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$ sur un intervalle à préciser.
3. En quels points f^{-1} est-elle dérivable ?
4. Calculer $(f^{-1})'(0)$. Calculer $f(e)$ et $f(e^2)$ et en déduire $(f^{-1})'(e)$ et $(f^{-1})'(2e^2)$.
5. Tracer dans un même repère les courbes représentatives de f et de f^{-1}.

Exercice 6 (***)

Pour tout entier $n \geq 2$, on définit sur $[0; +\infty[$ les fonctions $g_n : x \mapsto (n-x)e^x - n$ et $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{e^x - 1}$ si $x > 0$, prolongée par $f_n(x) = 0$.

1. Étudier les variations de g_n.
2. Prouver l'existence d'un unique réel a_n tel que $g_n(a_n) = 0$ et montrer que $a_n \in]n-1; n[$.
3. Étudier la continuité de f_n.
4. Étudier la dérivabilité de f_n et préciser, si elle existe, l'équation de sa tangente en 0.
5. Étudier les variations de f_n (cela devrait faire intervenir les résultats de la question 2).
6. Montrer que $f_n(a_n) = (n - a_n)a_n^{n-1}$.
7. Étudier la position relative des courbes représentatives de f_n et f_p lorsque $p > n$.
8. Tracer dans un même repère les courbes représentatives de f_2 et f_3 (en choisissant une échelle adaptée).