Feuille d'exercices n°8 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

17 novembre 2009

Exercice 1 (**)

Commençons par remarquer qu'il y a au total $13^4 = 28\ 561$ tirages possibles (ce sont des listes).

- Au moins une boule blanche : on passe par le complémentaire, il y a 8^4 tirages ne comportant que des boules noires, donc $13^4 - 8^4 = 24\ 465$ tirages avec au moins une boule blanche.
- Au plus une boule noire : on sépare en deux cas. Il y a soit zéro boule noire (5^4 cas) soit une boule noire ($5^3 \times 8 \times \binom{4}{1}$), le coefficient binomial étant là pour le choix de la position de la boule noire), donc $5^4 + 5^3 \times 8 \times \binom{4}{1} = 4\ 625$ tirages au total.
- Trois boules noires puis une blanche : $8^3 \times 5 = 2\ 560$ tirages (pas de choix pour l'ordre ici).
- Deux noires et deux blanches : $8^2 \times 5^2 \times \binom{4}{2} = 9\ 600$ tirages possibles (encore une fois, le coefficient binomial correspond au nombre de choix pour les deux boules blanches sur les quatre tirages).

Exercice 2 (**)

Il y a au total $\displaystyle\binom{21}{5}$ tirages possibles.

- Il y a 17 atouts qui ne sont pas multiples de 5, donc $\displaystyle\binom{17}{5}$ tirages qui ne contiennent aucun multiple de 5. Par passage au complémentaire, il reste donc $\displaystyle\binom{21}{5} - \binom{17}{5}$ tirages avec au moins un multiple de 5.
- Un multiple de cinq et un de trois : il faut distinguer le cas où on tire le 15 (qui est le seul multiple de cinq et de trois à la fois) et celui où les deux multiples sont différents. Sachant qu'il y a onze atouts qui ne sont multiples ni de cinq ni de trois, on a $\displaystyle\binom{11}{4} + \binom{6}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{11}{3}$ tirages possibles.
- Ni le 1 ni le 21 : par passage au complémentaire, $\displaystyle\binom{21}{5} - \binom{19}{5}$ tirages.

Exercice 3 (*)

1. On a assez simplement $|A\backslash B| = |A| - |A \cap B| = 112 - 67 = 45$.
2. Il suffit de faire une somme : $|C| = |A \cap C| + |(B \cap C)\backslash A| + |C\backslash(A \cup B)| = 32 + 5 + 56 = 93$.
3. Ceux qui ont voté pour au moins l'un des trois sont au nombre de $|A \cup B \cup C| = |A| + |B\backslash A| + |C\backslash(A \cup B)| = 112 + 22 + 56 = 190$. Il en reste donc 10 qui n'ont voté pour aucun des trois.
4. $A\backslash(B \cup C) = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 112 - 67 - 32 + 12 = 25$.

Exercice 4 (** à ***)

- Aucune condition : $\binom{32}{5} = 201\ 376$ tirages.
- Deux Rois : $\binom{4}{2} \times \binom{28}{3} = 19\ 656$ (on choisit deux cartes parmi les quatre Rois et trois parmi les 28 cartes ne sont pas des Rois).
- Au moins un pique : par passage au complémentaire, $\binom{32}{5} - \binom{24}{5} = 158\ 872$
- Un As et deux carreaux : il faut distinguer le cas de l'As de carreau, ce qui fait $\binom{21}{4}$ (l'As de carreau et quatre cartes parmi les 21 qui ne sont ni des carreaux ni des As) $+\binom{3}{1} \times \binom{7}{1} \times \binom{21}{3}$ (un As qui n'est pas un carreau, un carreau qui n'est pas un As, et trois autres cartes qui ne sont ni des carreaux ni des As), soit 33 915 tirages.
- Pas de carte en-dessous du 9 : $\binom{24}{5} = 42\ 504$ tirages (il y a 24 cartes au-dessus du 9).
- Deux paires : il faut choisir les hauteurs des deux paires (parmi huit possibles), puis les couleurs des deux cartes pour chaque paire, et enfin la dernière carte, soit $\binom{8}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{24}{1} =$ 24 192 tirages.
- Cinq cartes de la même couleur : 4 choix pour la couleur, puis 5 cartes à choisir parmi les 8 de la couleur, soit $4 \times \binom{8}{5} = 224$ tirages possibles.
- Quinte flush : 16 tirages (là, on peut compter à la main).

Exercice 5 (***)

1. Il y a $\binom{6}{2}$ parties à 2 éléments dans E (c'est la définition d'un coefficient binomial !). Soit A l'une d'entre elles, par exemple $A = \{1; 2\}$. Une partie B vérifiant $A \cup B = E$ doit nécessairement contenir 3, 4, 5 et 6 (puisqu'ils ne sont pas dans A, et un sous-ensemble quelconque de $\{1; 2\}$. Il y a donc 2^2 telles parties B (pour chaque A possible).
2. De la même façon, si A est une partie à k éléments, B doit nécessairement contenir les éléments qui ne sont pas dans A, et un quelconque sous-ensemble des k éléments de E, ce qui laisse 2^k possibilités pour B (on a, pour chaque élément de A, 2 possibilités : soit on le prend, soit on ne le prend pas). Pour $k = 0$, c'est-à-dire si $A = \emptyset$, on a bien une seule possibilité pour B (E tout entier), pour $k = 1$, il y en a 2 (soit B contient l'unique élement de A, soit non), etc, jusqu'au cas où $k = 6$, c'est-à-dire $A = E$, où on peut prendre pour B n'importe quel sous-ensemble de E, ce qui laisse 2^6 possibilités.
3. Au total, il y a $\binom{6}{0} \times 2^0 + \binom{6}{1} \times 2^1 + \cdots + \binom{6}{6} \times 2^6$ possibilités, soit $\sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 2^k 1^{n-k}$. On reconnait une formule du binôme, qui vaut $(2+1)^6 = 3^6 = 729$.
4. Exactement de la même façon, on obtiendra $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ possibilités, soit 3^n. Une autre façon de trouver ce résultat est de constater que, pour chacun des n éléments, on a trois possibilités : soit il appartient seulement à A, soit seulement à B, soit à $A \cap B$ (il n'a pas le droit de n'appartenir ni à A ni à B si on veut avoir $A \cup B = E$).

Exercice 6 (*)

Application directe de l'exemple vu en cours : il y a $\dfrac{10!}{4! \times 4!} = 6\,300$ anagrammes pour MISSISSIPI et $\dfrac{11!}{5! \times 2! \times 2!} = 83\,160$ pour ABRACADABRA.

Exercice 7 (**)

Pas vraiment de méthode générale, on va dénombrer au cas par cas :

– s'il n'y a pas d'ex æquo, $4! = 24$ classements.

– s'il y a quatre ex æquo, 1 classement.

– s'il y a trois ex æquo, $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times 2 = 8$ classements (il faut choisir les trois ex æquo, et leur classement).

– s'il y a deux ex æquo, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times 3! = 36$ classements.

– enfin, s'il y a deux fois deux ex æquo, $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$ classements (il suffit de choisir les deux ex æquo de tête).

Il y a donc au total 75 classements possibles.

Exercice 8 (**)

1. Il y a bien sûr 4^n tirages possibles.
2. C'est une application de la formule de Poincaré. Notons A l'ensemble des tirages qui ne font pas apparaitre le chiffre 1, B ceux où il n'y a pas de 2, C et D ceux sans 3 et sans 4. On a alors $|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - \cdots - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + \cdots - |A \cap B \cap C \cap D|$. Les cardinaux de A, B, C et D sont 3^n, ceux de chaque intersection de deux d'entre eux valent 2^n, les intersections trois à trois ont pour cardinal 1, et l'intersection des quatre est vide, donc $|A \cup B \cup C \cup D| = 4 \times 3^n - 6 \times 2^n + 4$. L'ensemble dont on cherche le cardinal étant le complémentaire de $A \cup B \cup C \cup D$, il a pour cardinal $4^n - 4 \times 3^n + 6 \times 2^n - 4$. La probabilité correspondante est $p_n = 1 - \dfrac{4 \times 3^n}{4^n} + \dfrac{6 \times 2^n}{4^n} - \dfrac{4}{4^n}$.
3. Chacun des trois derniers termes est une suite géométrique de raison plus petite que 1, donc tend vers 0. On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$ (c'est-à-dire que, lorsque n grandit, la probabilité d'obtenir en faisant n lancers au moins une fois chaque face du dé tend à devenir certaine).
4. On vérifie laborieusement que p_n dépasse 0.9 pour $n = 13$.

Exercice 9 (*)

Du calcul brutal utilisant bien entendu la formule du binôme de Newton : $(x-3)^5 = x^5 - 15x^4 + 90x^3 - 270x^2 + 405x - 243$; $(2x+3y)^3 = 8x^3 + 36xy^2 + 54xy^2 + 27y^3$ et $(x-1)^7 = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$.

Exercice 10 (***)

La première est une application directe du binôme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k = (1-1)^n = 0$. Pour la deuxième, il est en fait plus facile d'utiliser une des formules vues en cours, sachant qu'on peut oublier $k = 0$

dans la somme puisque le terme est nul : $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n \times 2^{n-1}$.
Enfin, pour la dernière, on utilise la même astuce mais en commençant par calculer une autre somme : $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n\sum_{k=2}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n-1} k\binom{n-1}{k} = n\sum_{k=1}^{n-1}(n-1)\binom{n-2}{k-1} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} = n(n-1)2^{n-2}$. Maintenant, reste à remarquer que $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}(k(k-1)+k)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$.

Exercice 11 (*)

C'est un calcul ignoble (on multiplie par 2 pour ne pas avoir de fraction) :
$2\left(\binom{n}{2} - \binom{n-p}{2} - \binom{n-q}{2} + \binom{n-p-q}{2}\right) = n(n-1) - (n-p)(n-p-1) - (n-q)(n-q-1) + (n-p-q)(n-p-q-1) = n^2 - n - n^2 + np + n + np - p^2 - p - n^2 + nq + n + nq - q^2 - q + n^2 - np - nq - n - np + p^2 + pq + p - nq + pq + q^2 + q = 2pq$, d'où le résultat.