Feuille d'exercices n°25 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

2 juin 2010

Exercice 1 (*)

On a donc $P(X = 1) = P(Y = 1) = p$ et $P(X = 0) = P(Y = 0) = 1 - p$. On en déduit la loi suivante pour (U, V) (pas vraiment d'autre méthode que de procéder au cas pas cas, sachant qu'il n'y a que quatre possibilités) :

$U\backslash V$	-1	0	1	$P(U = i)$
0	0	$(1-p)^2$	0	$(1-p)^2$
1	$p(1-p)$	0	$p(1-p)$	$2p(1-p)$
2	0	p^2	0	p^2
$P(V = j)$	$p(1-p)$	$p^2 + (1-p)^2$	$p(1-p)$	

Les deux variables ne sont manifestement pas indépendantes : on a par exemple $P((U = 0) \cap (V = 1)) = 0$, alors que $P(U = 0) \times P(V = 1) \neq 0$.

Exercice 2 (**)

Le mieux si on ne veut pas se perdre dans le remplissage du tableau est encore d'écrire tous les rangements possibles, au nombre de 27, et de compter. Sinon, on s'en sort sans : si $N = 0$, on a nécessairement $X = 1$ puisqu'on a alors une chaussette dans chaque tiroir, et cela se produit avec probabilité $\dfrac{6}{27}$ (six rangements possibles, on peut permuter les chaussettes). Si $N = 1$, soit $X = 0$ avec probabilité $\dfrac{6}{27}$ (trois cas avec une chaussette dans le deuxième tiroir et deux dans le troisième, trois autres cas où c'est le contraire), soit $X = 1$ avec probabilité $\dfrac{6}{27}$ (deux choix pour le tiroir où caser les deux chaussettes restantes, et trois choix de chaussette à mettre dans le premier tiroir), soit enfin $X = 2$ avec probabilité $\dfrac{6}{27}$ (essentiellement le même raisonnement que le cas précédent). Enfin, si $N = 2$, on a trois cas (il faut choisir le tiroir qui accueille les trois chaussettes), un pour lequel $X = 3$ et deux pour lesquels $X = 0$.

$X\backslash N$	0	1	2	$P(X = i)$
0	0	$\frac{6}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{8}{27}$
1	$\frac{6}{27}$	$\frac{6}{27}$	0	$\frac{12}{27}$
2	0	$\frac{6}{27}$	0	$\frac{6}{27}$
3	0	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{27}$
$P(N = j)$	$\frac{6}{27}$	$\frac{18}{27}$	$\frac{3}{27}$	

Encore une fois, les deux variables ne sont pas du tout indépendantes.

Exercice 3 (**)

On a $P((X=i)\cap(Y=j)) = \dfrac{1}{in}$ si $j \leqslant i$, et 0 sinon (le numéro de la boule est toujours inférieur à celui de l'urne). En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $(Y=j)$, on a donc $P(X=i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} \frac{1}{in} = i \times \frac{1}{in} = \frac{1}{n}$. C'est sans surprise une loi uniforme, d'espérance $\dfrac{n+1}{2}$. Quand à Y, on a $P(Y=j) = \displaystyle\sum_{i=j}^{n} \frac{1}{in}$ et $E(Y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=j}^{n} \frac{1}{in} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \frac{j}{in} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{in}\frac{i(i+1)}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{i+1}{2n} = \frac{n(n+1)}{4n} + \frac{1}{2} = \frac{n+3}{4}$.

Exercice 4 (***)

1. On doit avoir $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P((X=i)\cap(Y=j)) = 1$, c'est-à-dire $1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} aij = a\sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j = a\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, donc $a = \dfrac{4}{n^2(n+1)^2}$.
2. Via la formule des probabilités totales, $P(X=i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} P((X=i)\cap(Y=j)) = ai\sum_{j=1}^{n} j = ai\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2i}{n(n+1)}$. Et donc $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2i^2}{n(n+1)} = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6n(n+1)} = \frac{2n+1}{3}$.
3. La loi de Y est la même que celle de X puisqu'obtenue par le même calcul.
4. On vérifie que $P(X=i)\times P(Y=j) = \dfrac{2i}{n(n+1)} \times \dfrac{2j}{n(n+1)} = \dfrac{4}{n^2(n+1)^2}ij = aij = P((X=i)\cap(Y=j))$. Les deux variables sont donc indépendantes.
5. On a $P(X=Y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P((X=i)\cap(Y=i)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{4i^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6n^2(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}$.
6. Comme souvent avec un max, il faut passer par la fonction de répartition. On a $\forall k \in \{1;\dots;n\}$, $\forall x \in [k;k+1[$, $F_X(x) = F_Y(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{2i}{n(n+1)} = \frac{k(k+1)}{n(n+1)}$. On a donc $\forall k \in \{1;\dots;n\}$, $\forall x \in [k;k+1[$, $F_U(x) = F_X(x)F_Y(x) = \dfrac{k^2(k+1)^2}{n^2(n+1)^2}$. On en déduit que $P(U=k) = F_U(k) - F_U(k-1) = \dfrac{k^2(k+1)^2}{n^2(n+1)^2} - \dfrac{(k-1)^2k^2}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{k^2((k+1)^2-(k-1)^2)}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{k^2\times 4k}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{4k^3}{n^2(n+1)^2}$.

Exercice 5 (***)

1. L'évènement $X_2 = 1$ signifie qu'on tire au deuxième tirage une boule différente de celle tirée au premier, ce qui se produit avec une probabilité $\dfrac{n}{n+1}$. On en déduit que $X_2 \sim \mathcal{B}\left(1, \dfrac{n}{n+1}\right)$.
2. De même $X_i = 1$, si chacun des $i-1$ premiers tirages a donné une boule différente de X_i, ce qui se produit avec probabilité $\dfrac{n}{n+1}$ pour chacun, donc $X_i \sim \mathcal{B}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{i-1}$.

3. On a $X_i = 1$ et $X_j = 1$, si les tirages i et j donnent des résultats différents (probabilité $\dfrac{n}{n+1}$), si chacun des $i-1$ premiers tirages est différent du i-ème et du j-ème (proba $\dfrac{n-1}{n+1}$, $i-1$ fois) et si chacun des tirages entre le i-ème et le j-ème est différent du j-ème (proba $\dfrac{n}{n+1}$, $j-i-1$ fois), soit une probabilité globale de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{j-i}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{i-1} = \dfrac{(n-1)^{i-1}n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$.
4. Si X_i et X_j sont deux lois de Bernoulli, X_iX_j est aussi une loi de Bernoulli, dont le paramètre est la valeur calculée à la question précédente (puisqu'avoir $X_iX_j = 1$ équivaut à $(X_i = 1) \cap (X_j = 1)$).
5. La formule donnant $P((X_i = 1) \cap (X_j = 1))$ n'est manifestement pas égale au produit de $P(X_i = 1)$ par $P(X_j = 1)$. Les deux variables ne sont donc pas indépendantes.
6. On a tout simplement $Z_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} X_i$.
7. On en déduit que $E(Z_p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} E(X_i) = \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{i-1} = \frac{1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^p}{1-\frac{n}{n+1}} = (n+1)\left(1-\left(\frac{n}{n+1}\right)^p\right)$.
   Lorsque p tend vers l'infini, comme $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p$ est une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1 tendant donc vers 0, cette espérance a pour limite $n+1$. C'est tout à fait logique, quand le nombre de boules tirées tend vers l'infini, on s'attend à tirer toutes les boules de l'urne, soit $n+1$ boules différentes.

Exercice 6 (***)

Commençons donc par le cas particulier où $n = 3$, ce qui permet encore de présenter sous forme de tableau. Les trois tableaux correspondent respectivement à $Z = 1$, $Z = 2$ et $Z = 3$. Il y a 27 tirages possibles au total, se répartissant comme suit :

$Y\backslash X$	1	2	3
1	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$
2	0	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$
3	0	0	$\frac{3}{27}$

$Y\backslash X$	1	2	3
1	0	0	0
2	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$
3	0	0	$\frac{3}{27}$

$Y\backslash X$	1	2	3
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	$\frac{1}{27}$

Pour obtenir les trois marginales, il faut dans le cas de Z faire la somme tableau par tableau, et dans le cas de X et de Y faire les sommes par lignes et par colonnes, en ajoutant les résultats des trois tableaux. On obtient :

	1	2	3
X	$\frac{1}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{19}{27}$
Y	$\frac{7}{27}$	$\frac{13}{27}$	$\frac{7}{27}$
Z	$\frac{19}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{1}{27}$

Dans le cas général, c'est un peu plus formel mais pas beaucoup plus compliqué. Soient (i,j,k) trois entiers inférieurs à n. Si $i > j > k$, on a $P((X=i)\cap(Y=j)\cap(Z=k)) = \dfrac{6}{n^3}$ (il y a n^3 tirages au total, et 6 favorables,, le nombre de permutations possibles des trois résultats). Si $i=j>k$ ou $i>j=k$, on a $P((X=i)\cap(Y=j)\cap(Z=k)) = \dfrac{3}{n^3}$, si $i=j=k$, on a $P((X=i)\cap(Y=j)\cap(Z=k)) = \dfrac{1}{n^3}$, et le reste du temps $P((X=i)\cap(Y=j)\cap(Z=k)) = 0$ (tous ces cas sont déjà présents dans le cas $n=3$). On en déduit par la formule des probabilités totales que $P(Z=k) = \sum_{j=k}^{n}\sum_{i=j}^{n} P((X=i)\cap(Y=j)\cap(Z=k)) = \dfrac{1}{n^3} + (n-k)\dfrac{3}{n^3} + \sum_{j=k+1}^{n}\sum_{i=j}^{n} P((X=i)\cap(Y=j)\cap(Z=k)) = \dfrac{1}{n^3} + 3\dfrac{n-k}{n^3} + \sum_{j=k+1}^{n} \dfrac{3}{n^3} + 6\dfrac{n-j}{n^3} = \dfrac{1}{n^3}(1+6(n-k)+3(n-k-1)(n-k))$. La loi de X est symétrique de celle de Z : $P(X=k) = P(Z=n+1-k) = \dfrac{1}{n^3}(1+6(k-1)+3(k-2)(k-1))$. Enfin, $P(Y=j) = \sum_{i=j}^{n}\sum_{k=1}^{j} P((X=i)\cap(Y=j)\cap(Z=k)) = \dfrac{1}{n^3} + (n-1)\dfrac{3}{n^3} + \sum_{i=j+1}^{n}\sum_{k=1}^{j-1}\dfrac{6}{n^3} = \dfrac{1}{n^3}(1+3(n-1)+6(j-1)(n-j))$. Vous pouvez vérifier que les formules marchent pour $n=3$, voire pour $n=4$ si vous êtes motivés.

Exercice 7 (EDHEC 99) (**)

1. (a) Puisque les deux variables sont indépendantes, $P((X=i)\cap(Y=j)) = \dfrac{1}{n}\times\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n^2}$.

   (b) Si $k \leqslant n+1$, $P(X+Y=k) = \sum_{i=1}^{i=n} P((X=i)\cap(Y=k-i))$. Mais si on veut avoir $1 \leqslant k-i \leqslant n$, on devra choisir des valeurs de i vérifiant $i \leqslant k-1$ (on aura toujours $k-i \leqslant n$ si $k \leqslant n+1$), donc $P(X+Y=k) = \sum_{i=1}^{k-1} P((X=i)\cap(Y=k-i)) = \sum_{i=1}^{k-1}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{k-1}{n^2}$.

   (c) Si $k > n+1$, on doit de même se restreindre pour avoir cette fois $k-i \leqslant n$, ce qui impose $i \geqslant k-n$, donc $P(X+Y=k) = \sum_{i=k-n}^{n} P((X=i)\cap(Y=k-i)) = \sum_{i=k-n}^{n}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{n-(k-n)+1}{n^2} = \dfrac{2n-k+1}{n^2}$.

2. Les variables $X+Y$ et Z sont indépendantes, on a donc $P(X+Y=Z) = \sum_{k=2}^{n} P(X+Y=k)\times P(Z=k) = \sum_{k=2}^{n}\dfrac{k-1}{n^2}\times\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n} k-1 = \dfrac{(n-1)n}{2n^3} = \dfrac{n-1}{2n^2}$.

3. (a) $P(T=k) = P(n+1-Z=k) = P(Z=n+1-k) = \dfrac{1}{n}$ pour $1 \leqslant n+1-k \leqslant n$, c'est-à-dire pour $1 \leqslant k \leqslant n$. La variable aléatoire T a bien la même loi que Z.

   (b) On en déduit que $P(X+Y+Z=n+1) = P(X+Y=n+1-Z) = P(X+Y=T)$. Comme Z et T suivent la même loi, cette probabilité est la même que celle calculée un peu plus haut : $\dfrac{n-1}{2n^2}$.

Exercice 8 (**)

1. C'est une loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{2}$.
2. Soient i et j deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Si $i \geqslant j$, on aura bien sûr $P((X = i) \cap (Y = j)) = 0$ (le deuxième Pile ne peut pas apparaitre avant le premier !). Si $i < j$, un seul tirage permet d'obtenir $X = i$ et $Y = j$: celui constitué de $i - 1$ Face, puis le premier Pile, puis une nouvelle série de Face entre les tirages i et j, et enfin le deuxième Pile. On impose donc le résultat des j premiers lancers de la série, ce qui donne $P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{1}{2^j}$.
3. Par la formule des probabilités totales, $\forall j \geqslant 2$ (Y prend nécessairement des valeurs supérieurs ou égales à 2), $P(Y = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P((X = i) \cap (Y = j)) = \sum_{i=1}^{i=j-1} \frac{1}{2^j} = \frac{j-1}{2^j}$.
4. On a tout simplement $\forall i < j$ $P_{Y=j}(X = i) = \frac{P((X = i) \cap (Y = j))}{P(Y = j)} = \frac{1}{j-1}$. Autrement dit, si on connait le rang du deuxième Pile, la loi du premier est uniforme sur les tirages précédents.
5. Il faut calculer $P_{X=n}(Y - n = k) = P_{X=n}(Y = n + k)$. Cette probabilité est non nulle pour tout entier $k \geqslant 1$ et vaut $\frac{P((X = n) \cap (Y = n + k))}{P(X = n)} = \frac{1}{2^{n+k}} \times 2^n = \frac{1}{2^k}$. Autrement dit, $Y - n$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ quand elle est conditionnée par $X = n$. C'est tout à fait logique : le temps d'attente du deuxième Pile à partir du lancer suivant le premier Pile suit la même loi que le temps d'attente du premier Pile.

Exercice 9 (***)

1. Commençons par déterminer l'allure de la fonction de répartition d'une loi géométrique : $\forall k \geqslant 1$, $\forall x \in [k, k+1[$, $F_X(x) = F_Y(x) = \sum_{i=1}^{i=k} P(X = i) = \sum_{i=1}^{i=k} p(1-p)^{i-1} = p \times \frac{1 - (1-p)^k}{1 - (1-p)} = 1 - (1-p)^k$. On en déduit la fonction de répartition de U : $\forall k \geqslant 1$, $\forall x \in [k, k+1[$, $F_U(x) = (1-q^k)^2$ (en posant comme d'habitude $q = 1 - p$), ce dont on déduit que $\forall k \geqslant 1$, $P(U = k) = F_U(k) - F_U(k-1) = (1-q^k)^2 - (1-q^{k-1})^2 = (2 - q^k - q^{k-1})(q^{k-1} - q^k) = pq^{k-1}(2 - q^k - q^{k-1})$. Pour V, c'est curieusement plus facile : $(1 - F_X(x))(1 - F_Y(x)) = q^k \times q^k = q^{2k}$, donc $F_V(x) = 1 - q^{2k}$, puis $P(V = k) = (1 - q^{2k}) - (1 - q^{2k-2}) = q^{2k-2}(1 - q^2)$. Autrement dit, $V \sim \mathcal{G}(1 - q^2)$.
2. Un peu de motivation : $E(U) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2kpq^{k-1} - kpq^{2k-1} - kpq^{2k-2} = 2p \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} - pq \sum_{k=1}^{+\infty} k(q^2)^{k-1} - p \sum_{k=0}^{+\infty} k(q^2)^{k-1} = \frac{2p}{(1-q)^2} - \frac{p(q+1)}{(1-q^2)^2} = \frac{2(1-q)}{(1-q)^2} - \frac{1-q^2}{(1-q^2)^2} = \frac{2}{1-q} - \frac{1}{1-q^2}$.
3. Par un calcul direct, puisque V suit une loi géométrique, $E(V) = \frac{1}{1-q^2}$. Sinon, on peut aussi utiliser que $U + V = X + Y$, d'où par linéarité $E(V) = E(X) + E(Y) - E(U) = \frac{2}{p} - \frac{2}{1-q} + \frac{1}{1-q^2} = \frac{1}{1-q^2}$. Remarquons qu'il est en fait infiniment plus simple de calculer d'abord l'espérance de V puisqu'on reconnait une loi classique, puis d'en déduire celle de U par linéarité.

Exercice 10 (***) (EM Lyon 2010)

1. C'est du cours : $\forall k \geqslant 1$, $P(X_1 = k) = pq^{k-1}$; $E(X_1) = \frac{1}{p}$ et $V(X_1) = \frac{q}{p^2}$.

2. On a $\Delta = 0$ si $X_1 = X_2$, ce qui donne $P(\Delta = 0) = P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{+\infty} P((X_1 = k) \cap (X_2 = k))$. Par indépendance de X_1 et X_2, $P(\Delta = 0) = \sum_{k=1}^{+\infty} (pq^{k-1})^2 = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} = \dfrac{p^2}{1-q^2} = \dfrac{p^2}{(1-q)(1+q)} = \dfrac{p}{1+q}$.
3. (a) La formule est vaguement inversée : $X_1 - X_2 = n$ revient à $X_1 = n + X_2$, d'où $P(X_1 - X_2 = n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_2 = k)P(X_1 = n+k)$ (la formule de l'énoncé est juste malgré tout, puisque X_1 et X_2 ont la même loi).
   (b) L'évènement $\Delta = n$ se produit si $X_1 - X_2 = n$ ou $X_2 - X_1 = n$, deux évènement incompatibles et ayant la même probabilité, donc en utilisant la question précédente $P(\Delta = n) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} \times pq^{n+k-1} = 2pq^n \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} = \dfrac{2pq^n}{1+q}$ (même fin de calcul qu'à la question 2).
4. (a) Sous réserve d'existence, l'espérance est donnée par $E(\Delta) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(\Delta = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2k\dfrac{pq^k}{1+q}$. Cette somme est, à un facteur près, celle d'une série géométrique dérivée de raison $q < 1$, donc elle converge et $E(\Delta) = \dfrac{2pq}{1+q}\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \dfrac{2pq}{(1+q)(1-q)^2} = \dfrac{2q}{1-q^2}$.
   (b) Si on n'aime pas le calcul, on peut répondre à la question de manière formelle : $E((X_1 - X_2)^2) = E(X_1^2) - 2E(X_1X_2) + E(X_2^2) = 2E(X_1^2) - 2E(X_1)E(X_2) = 2V(X_1)$ via König-Huygens (on a utilisé l'indépendance pour découper l'espérance du produit).

   Autre méthode, le calcul brutal : via théorème du transfert, $E((X_1 - X_2)^2) = \sum_{-\infty}^{+\infty} k^2 P(X_1 - X_2 = k) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \times \dfrac{pq^k}{1+q}$ (en effet, $X_1 - X_2$ peut prendre des valeurs négatives, mais le terme de la somme obtenu pour $k = -n$ est identique au terme correspondant à $k = n$, ce qui permet de ne calculer qu'une moitié de la somme). On a donc $E((X_1 - X_2)^2) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\dfrac{pq^k}{1+q} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} k\dfrac{pq^k}{1+q} = \dfrac{2pq^2}{1+q}\sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} + \dfrac{2pq}{1+q}\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \dfrac{4pq^2}{(1+q)(1-q)^3} + \dfrac{2pq}{(1+q)(1-q)^2} = \dfrac{4q^2 + 2pq}{(1+q)(1-q)^2} = \dfrac{2q(2q+p)}{(1+q)(1-q)^2} = \dfrac{2q}{(1-q)^2}$ car $2q + p = 2 - p = 1 + q$. Finalement, on obtient bien $\dfrac{2q}{p^2} = 2V(X_1)$.

   Ne reste plus qu'à achever le calcul de la variance de Δ. Comme $|X_1 - X_2|^2 = (X_1 - X_2)^2$, $V(\Delta) = E(\Delta^2) - E(\Delta)^2 = \dfrac{2q}{p^2} - \dfrac{4q^2}{(1-q^2)^2}$, qu'on peut simplifier ou non selon sa bonne volonté.
5. L'évènement A peut se traduire par $X_3 > \max(X_1 - X_2, X_2 - X_1)$, ce qui correspond bien à $X_3 > \Delta$.
6. (a) C'est une simple application de la formule des probabilités totales avec le système complet formé des évènements $\Delta = k$.
   (b) Commençons par calculer $P(X_3 > k) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X_3 = i) = \sum_{i=k+1}^{+\infty} pq^{i-1} = pq^k \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i-1} =$

$\dfrac{pq^k}{1-q} = q^k$.

On a donc $P(A) = P(\Delta = 0) \times P(X_3 > 0) + \sum_{k=1}^{+\infty} P(\Delta = k) \times P(X_3 > k) = \dfrac{p}{1+q} \times 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{2pq^k}{1+q} \times q^k = \dfrac{p}{1+q} + \dfrac{2pq^2}{1+q} \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} = \dfrac{p}{1+q} + \dfrac{2pq^2}{(1+q)(1-q^2)} = \dfrac{p(1+q)+2q^2}{(1+q)^2} = \dfrac{1+q^2}{(1+q)^2}$.