Feuille d'exercices n°14 : corrigé

ECE3 Lycée Carnot

19 janvier 2010

Exercice 1 (** à ***)

1. La fonction f est dérivable sur $\mathcal{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables, et sa dérivée est $f'(x) = \dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}e^{-x} = \dfrac{(1-2x)e^{-x}}{2\sqrt{x}}$. Cette fonction étant continue, la fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Reste à se préocupper de ce qui se passe en 0. La dérivée de f ayant pour limite $+\infty$ en 0, on ne peut pas prolonger f' en 0, et le théorème de prolongement C^1 nous permet alors d'affirmer que f n'est pas dérivable en 0, mais la courbe de f y admettra une tangente verticale.
2. La fonction g est dérivable et $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;1[$, de dérivée $h'(x) = -\sqrt{1-x^2} - (1-x)\dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{x-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1-x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \dfrac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 1} g'(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to -1} g'(x) = +\infty$. La fonction g est donc dérivable en 1 (et y admet une tangente horizontale) mais pas en -1 (où il y aura une tangente verticale).
3. La fonction h est définie sur $]-\infty;-1] \cup [0;+\infty[$, dérivable et $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$, et sa dérivée vaut $h'(x) = \sqrt{x+x^2} + x\dfrac{1+2x}{2\sqrt{x+x^2}} = \dfrac{2x+2x^2+x+2x^2}{2\sqrt{x+x^2}} = \dfrac{x(3+4x)}{\sqrt{x(1+x)}} = \dfrac{(3+4x)\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}$. On constate que $\lim\limits_{x\to -1} h'(x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to 0} h'(x) = 0$, donc i est dérivable en 0 (avec une tangente horizontale) mais pas en -1 (où il y a une tangente verticale).
4. Commençons par vérifier que i est continue en 0 : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} i(x) = 0$, donc i est bien continue en 0. Comme d'habitude, le seul problème pour la dérivée sera aux bornes de l'intervalle de définition, ici en 0. Ailleurs, i est dérivable et même C^1, de dérivée $i'(x) = \dfrac{(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}})(e^x-1) - x\sqrt{x}e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{3\sqrt{x}(e^x-1) - 2x\sqrt{x}e^x}{2(e^x-1)^2} = \dfrac{x\sqrt{x}}{(e^x-1)^2}\left(\dfrac{3}{2}\dfrac{e^x-1}{x} - e^x\right)$. Quand x tend vers 0, la parenthèse a pour limite $\dfrac{1}{2}$, et le facteur devant la parenthèse est équivalent à $\dfrac{x\sqrt{x}}{x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (car $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$). On en conclut que $\lim\limits_{x\to 0} i'(x) = +\infty$, donc la fonction i n'est pas dérivable en 0 (où il y aura une fois de plus une tangente verticale.

Exercice 2 (**)

1. Commençons par calculer les premières dérivées pour nous donner une idée : $f'(x) = -\dfrac{-1}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$. Pour la dérivée seconde, on utilise $\left(\dfrac{1}{u^2}\right)' = \dfrac{-2u'}{u^3}$, ce qui donne $f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$. De même, on obtient $f^{(3)}(x) = \dfrac{2\times 3}{(1-x)^4}$, et on conjecture que $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. Reste à

le prouver par récurrence. On a déjà fait l'initialisation. Supposons la formule vraie au rang n, on a alors $f^{(n+1)} = (f^{(n)})' = \dfrac{n! \times (n+1)}{(1-x)^{n+2}} = \dfrac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$, ce qui achève la récurrence.

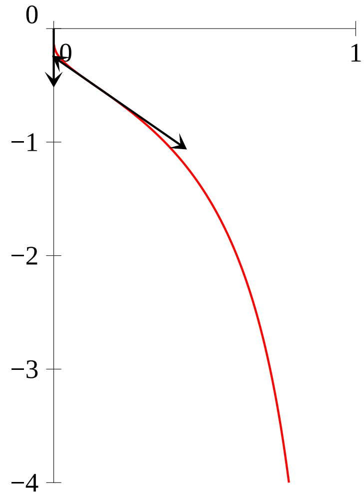
2. C'est exactement le même principe qu'au-dessus, la seule différence étant qu'on récupère un changement de signe à chaque étape. On conjecture et on prouve de même que $g'(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.
3. L'astuce diabolique consiste à remarquer que $g(x)+f(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1-x+1+x}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{2}{1-x^2} = 2h(x)$, donc $h(x) = \dfrac{1}{2}(f(x)+g(x))$, d'où $h^{(n)}(x) = \dfrac{1}{2}(f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x))$, c'est-à-dire $h^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{2(1-x)^{n+1}} + \dfrac{(-1)^n n!}{2(1+x)^{n+1}}$.

Exercice 3 (*)

1. La fonction f est un produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$, donc est $\mathcal{C}^\infty$.
2. On calcule $f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} = -xe^{-x}$, puis $f''(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x}$, $f^{(3)}(x) = (1-(x-1))e^{-x} = (2-x)e^{-x}$, $f^{(4)}(x) = (x-3)e^{-x}$ etc. On conjecture que $f^{(n)} = (-1)^n(x-n+1)e^{-x}$.
3. L'initialisation a déjà été faite, reste à prouver l'hérédité. Supposons donc la formule vérifiée au rang n, on a alors $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n e^{-x} - ((-1)^n(x-n+1))e^{-x} = (-1)^{n+1}(-1+x-n+1)e^{-x} = (-1)^{n+1}(x-n)e^{-x}$, ce qui est bien la formule attendue pour le rang $n+1$.

Exercice 4 (**)

1. La fonction f est bien sûr continue et dérivable sur $]0;1[$. De plus, $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. La fonction f est donc continue en 0. Sa dérivée sur $]0;1[$ vaut $f'(x) = \dfrac{-1}{x(\ln x)^2}$. Cette dérivée est continue sur $]0;1[$, et a pour limite $-\infty$ en 0 car $\lim\limits_{x\to 0} x(\ln x)^2 = 0$ par croissance comparée. D'après le théorème du prolongement C^1, il y aura donc une tangente verticale en 0. Notons au passage que f' est négative sur $]0;1[$, et que f est donc strictement décroissante sur cet intervalle.
2. Dérivons donc une deuxième fois f sur $]0;1[$: la dérivée de $x(\ln x)^2$ est $(\ln x)^2 + x \times 2\dfrac{\ln x}{x} = (\ln x)^2 + 2\ln x$, donc $f''(x) = \dfrac{(\ln x)^2 + 2\ln x}{x^2(\ln x)^4} = \dfrac{\ln x + 2}{x^2(\ln x)^3}$. Sur $]0;1[$, $\ln x$ est négatif, donc $\dfrac{1}{x^2(\ln x)^3} < 0$ et f'' est de signe opposé à celui de $\ln x + 2$, qui s'annule quand $\ln x = -2$, c'est-à-dire $x = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$. La fonction f est donc convexe sur $]0, e^{-2}]$ et concave sur $[e^{-2}, 1[$.
3. On vient de voir que f'' s'annulait pour $x = e^{-2}$. Comme $f(e^{-2}) = \dfrac{1}{\ln(e^{-2})} = -\dfrac{1}{2}$ et $f'(e^{-2}) = \dfrac{-1}{e^{-2}(-2)^2} = -\dfrac{e^2}{4}$, le point d'inflexion a pour coordonnées $\left(e^{-2}; -\dfrac{1}{2}\right)$, et la tangente à la courbe en ce point a pour équation $y = -\dfrac{e^2}{4}(x - e^{-2}) - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{e^2}{4}x - \dfrac{1}{4}$.
4. Voici une allure de la courbe, avec la tangente calculée ci-dessus tracée en noir :



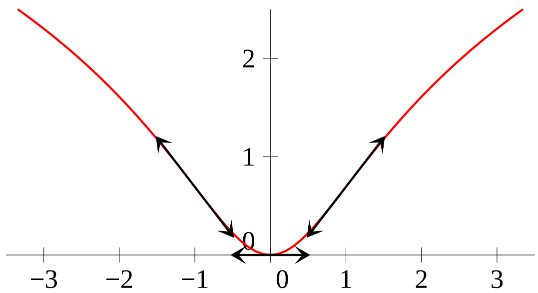
Exercice 5 (***)

Étude de la fonction f

Comme $1 + x^2$ est toujours strictement positif, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et y est $\mathcal{C}^\infty$ par théorèmes généraux. On peut également constater que la fonction est paire.

On a sans difficulté $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, et comme $\dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{\ln(2x^2)}{x}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ par croissance comparée. La courbe représentative de f admet donc une branche parabolique de direction (Ox) en $+\infty$. Même conclusion en $-\infty$ en utilisant la parité ou en effectuant des calculs très similaires.

Étudions désormais les variations : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, atteignant en 0 un minimum de valeur $f(0) = \ln(1) = 0$. De plus, $f'(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$. La fonction f a donc deux points d'inflection pour $x = 1$ et $x = -1$, de hauteur $f(1) = f(-1) = \ln(2)$ et dont les tangentes ont pour pentes respectives $f'(1) = \dfrac{2}{2} = 1$ et $f'(-1) = \dfrac{-2}{2} = -1$. La fonction f est convexe sur $[-1; 1]$ (sa dérivée seconde est alors positive), et concave sur $]-\infty; -1]$ et sur $[1; +\infty[$. Voici une allure de la courbe (courbe en rouge, tangentes intéressantes en noir) :



Étude de la fonction g

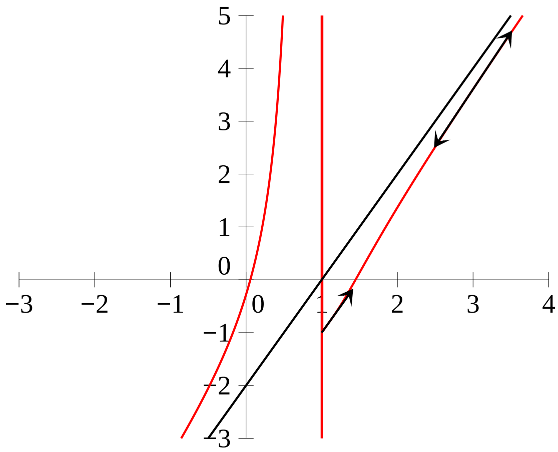
La fonction g est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et y est $\mathcal{C}^\infty$ par théorèmes généraux.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{1-x}} = 1$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 2$ et enfin $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) - 2x = -2$. Il y a donc en $+\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 2$. Cette asymptote est d'ailleurs tout aussi valable en $-\infty$ par des calculs similaires. Pour les plus pressés, signalons d'ailleurs qu'on peut en $+\infty$ comme en $-\infty$ $e^{\frac{1}{1-x}} = 1 + o(1)$, donc $g(x) = 2x - 2 + o(1)$, ce qui règle tout de suite la question de l'asymptote.

Du côté de 1 c'est plus compliqué : $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{1-x} = +\infty$, ce dont on déduit $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$. Il y a donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$. Mais par ailleurs $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{1-x} = -\infty$, ce dont on déduit cette fois que $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) = 2 - 3 = -1$. La fonction g est donc prolongeable « par continuité » en posant $g(1) = -1$.

Dérivons désormais : $g'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2} e^{\frac{1}{1-x}} + 2$, qui a le bon gout de toujours être positif. La fonction est donc croissante sur chacun de ses deux intervalles de définition. De plus, g' a pour limite 2 en -1^+ (on a toujours $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{1-x} = -\infty$ et, par croissance comparée, $\lim\limits_{X \to -\infty} X^2 e^X = 0$, donc la composition des limites nous donne une limite nulle pour le premier morceau). Il y aura donc une demi-tangente à droite de pente 2 en notre point prolongé par continuité à droite.

Enfin, $g''(x) = \left(\dfrac{2}{(1-x)^3} + \dfrac{1}{(1-x)^2} \right) e^{\frac{1}{1-x}} = \dfrac{3-x}{(1-x)^3} e^{\frac{1}{1-x}}$. Il y a donc un point d'inflexion pour $x = 3$, et $g(3) = e^{-\frac{1}{2}} + 3 = \dfrac{1}{\sqrt{e}} + 3$; $g'(3) = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{4} + 2 = \dfrac{1}{4\sqrt{e}} + 2$. La fonction f est convexe sur $]-\infty; -1[$ et sur $[3; +\infty[$ et concave sur $[1; 3]$ (le dénominateur changeant de signe pour $x = 1$). Avec tout ça, on doit pouvoir tracer une courbe ressemblant à la suivante :



Étude de la fonction h

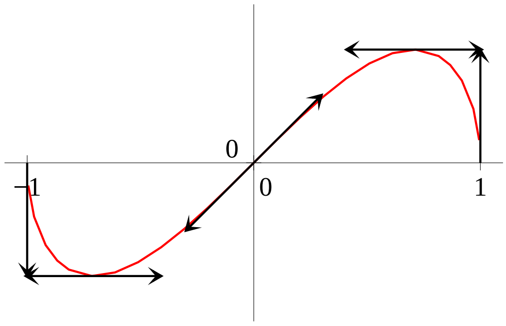
La fonction h est définie sur $[-1; 1]$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1; 1[$ par théorèmes généraux. De plus, la fonction est paire.

Pas de limites à calculer, bornons-nous à remarquer que $h(-1) = h(1) = 0$.

On a $h'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \times \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{2(1-x^2) - 2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. Il y a donc deux extrema pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On calcule $h\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1 - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$ et $h\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}$. Constatons au passage que les limites de h' en -1 et en 1 sont infinies puisque le numérateur de h' tend vers -2 et le dénominateur vers 0. De plus, $h''(x) = \dfrac{-4x\sqrt{1-x^2} - (1-2x^2) \times \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \dfrac{-4x(1-x^2) + x(1-2x^2)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{2x^3 - 3x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{x(2x^2-3)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Cette dérivée seconde ne s'annule que pour

$x = 0$ (car h n'est définie que sur $[-1;1]$, intervalle où $2x^2 - 3$ est toujours négatif), point d'inflexion pour lequel on a $h(0) = 0$ et $h'(0) = 1$, et on obtient le tableau de variations complet suivant :

x	-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
$h''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$h'(x)$	$-\infty$	$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	$-\infty$
h	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0
h	convexe				concave				



Étude de la fonction i

La fonction i est bien sûr définie sur $]0;+\infty[$, et y est $\mathcal{C}^\infty$ par théorèmes généraux.

La limite de i quand x tend vers 0 est $-\infty$ (non, il n'y a pas de forme indéterminée), il y a donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} i(x) = 0$, donc il y a également une asymptote horizontale (l'axe des abscisses) en $+\infty$.

Comme $i'(x) = \dfrac{2-(2\ln x + 3)}{x^2} = \dfrac{-1-2\ln x}{x^2}$, la fonction i admet un maximum en $x = e^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, de valeur $i\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = (2\times(-\frac{1}{2})+3)\sqrt{e} = 2\sqrt{e}$. De plus, $i''(x) = \dfrac{-2x - 2x(-1-2\ln x)}{x^4} = \dfrac{4\ln x}{x^3}$. La fonction admet donc un point d'inflexion pour $x = 1$, et $i(1) = 3$; $i'(1) = -1$. La fonction i est concave sur $]0;1]$ et convexe sur $[1;+\infty[$, avec une courbe ressemblant à ceci :