Feuille d'exercices n°14 : Dérivées successives, convexité

ECE3 Lycée Carnot

15 janvier 2010

Exercice 1 (** à ***)

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de dérivabilité et la présence d'éventuelles tangentes verticales aux points posant problème.

- $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$
- $g(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$
- $h(x) = x\sqrt{x+x^2}$
- $i(x) = \dfrac{x\sqrt{x}}{e^x - 1}$ prolongée par $j(0) = 0$

Exercice 2 (**)

Calculer pour tout entier n la dérivée n-ème de chacune des fonctions suivantes :

- $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$
- $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$
- $h(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$

Exercice 3 (*)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

1. Montrer que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Calculer les premières dérivées de f et essayer de conjecturer la forme de $f^{(n)}$.
3. Prouver cette conjecture par récurrence.

Exercice 4 (**)

Soit f la fonction définie sur $[0;1[$ par $f(0) = 0$, et pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[0;1[$ (0 compris).
2. Déterminer si f est convexe ou concave sur $[0;1[$.
3. Montrer que f possède un unique point d'inflexion sur cet intervalle et déterminer la tangente de f en ce point.
4. Tracer une allure de la courbe représentative de f.

Exercice 5 (** à ***)

Étudier le plus complètement possible chacune des fonctions suivantes, en précisant notamment la convexite et la présence éventuelle de points d'inflexion.

- $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$
- $g : x \mapsto e^{\frac{1}{1-x}} + 2x - 3$
- $h : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$
- $i : x \mapsto \dfrac{2\ln x + 3}{x}$